CALCULO

DIFERENCIAL

PARA

CIENCIAS E INGENIERIA

CUARTA EDICION

Jorge Sáenz

HIPOTENUSA

REVISIÓN

2025

CALCULO DIFERENCIAL PARA CIENCIAS E INGENIERIA

Autor: Jorge A. Sáenz

ISBN: 978-612-48516-0-5

Cuarta Edición, Marzo 2021

Revisión, Enero 2025

Editado por:

Editorial Hipotenusa EIRL

Lima - Perú

www.hipotenusaonline.com

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2021-03719

CONTENIDO

PRÓLOGO

Esta obra esta concebida para ser empleada como texto de un primer curso de Cálculo por estudiantes de ciencias o ingeniería, apuntando a una introducción didáctica al *cálculo de una variable* .

Cambios en esta edición

El cambio más notable, con respecto a las ediciones previas, es la exclusión de los temas de Precálculo, ya que, todos ellos, son estudiados en detalle en nuestro nuevo texto *Precálculo Para Todos*, que puede considerarse como el preludio por defecto de esta obra.

Se ha agregado la sección "**¿Sabías esto?**" donde exponemos historias, personajes y aplicaciones modernas; todos ellos, vinculados a la temática del capítulo o sección.

Dado que hacer matemática seriamente no significa hacerlo sin reírse, nos hemos tomado la libertad (o atrevimiento) de incluir la sección “**Humor en tiempos de Ciencia**” donde encontrarás referencias a la cultura pop que circulan por redes sociales, y suponemos, son humorísticas. Estas referencias están relacionadas con la temática de cada sección o capítulo. Esperamos que puedan ser apreciadas por algunos lectores, y perdonadas por otros.

Otros detalles

Hacemos énfasis en lograr un balance entre la teoría y la práctica, donde la teoría es acompañada de numerosos ejemplos. Una parte de cada sección está dedicada a presentar **Problemas Resueltos** a todo detalle. La gran mayoría de los teoremas son presentados con sus respectivas demostraciones. Cuando estas son muy complejas, se presentan como problemas resueltos.

En la sección "**Problemas Propuestos**" podrás encontrar enunciados de ejercicios, cuyas respuestas encontrarás en la parte posterior del libro, en la sección de **Respuestas**. Los encabezados de cada sección de *Problemas Propuestos* contienen un *código QR* que enlaza con una sección de nuestro sitio web (www.hipotenusaonline.com), donde puedes visualizar y compartir todos los enunciados y respuestas de este libro.

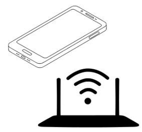
¿Por qué aprender Cálculo?

Desde su descubrimiento (o invención), el cálculo se ha extendido a casi todos los campos de la ciencia, por lo que muchas de las tecnicidades que hoy son parte de nuestras vidas no son más que aplicaciones del cálculo. Por mencionar algunas de ellas:

Computadoras

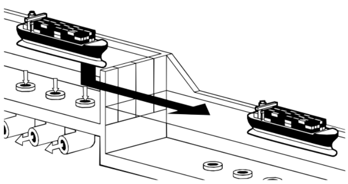
Vehículos Automotores

Dispositivos Electrónicos

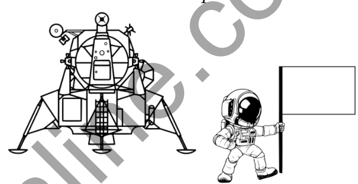


Viajes en Avión

Grandes obras de Ingeniería



Misiones Espaciales



El cálculo también es una importante herramienta en la toma de decisiones, ya que puede predecir diversos eventos. *Stephen Hawking* solía decir que lo más difícil de predecir es el comportamiento humano, puesto que aun quedan muchas ecuaciones por resolver para lograr semejante propósito. Es probable que estas ecuaciones sean *ecuaciones diferenciales*; y a juzgar por los últimos avances del *Machine Learning*, parece ser que sí se están resolviendo.

El cálculo tiene dos vertientes principales: diferencial e integral. En este curso estudiaremos el cálculo diferencial, que convencionalmente se enseña antes que el integral, aunque ambos están intrínsecamente relacionados.

Si he llegado a ver más lejos que otros,
es porque me subí a los hombros de gigantes.

Isaac Newton

1

LIMITES Y CONTINUIDAD

Leonardo Euler
(1707 - 1783)

Leonardo Euler nació en Basilea, Suiza. A temprana edad recibió lecciones del distinguido matemático, *Johann Bernoulli*, junto a sus brillantes hijos, *Nicolás* y *Daniel*. Eventualmente, estos dos jovencitos obtuvieron gran renombre por sus propios méritos, al igual que Leonardo; quien logró seguirles el ritmo pese a ser menor que ellos por 12 y 7 años, respectivamente.

En el año 1726, fue invitado a incorporarse a la Academia de Ciencias de San Petersburgo por parte de la Reina de Rusia, Catalina. Posteriormente, el mismo Rey Federico (el Grande) le extendió otra invitación para formar parte de la Academia de Ciencias de Berlín. En ambas instituciones produjo abundantes trabajos de investigación.

Se dice que Euler es *el matemático más prolífico de la historia* por varios motivos, como lo son sus notables contribuciones al *cálculo de variaciones*, la *teoría de números* y *ecuaciones diferenciales*. También introdujo al número **e** como base de los logaritmos naturales. Logró producir alrededor de 886 trabajos que, recopilados, constituirían 80 libros de buen volumen. Al morir dejó trabajos para publicar por 20 años a la Academia de San Petersburgo; una hazaña más que extraordinaria, considerando que perdió la vista 17 años antes de su muerte.

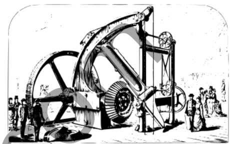
ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

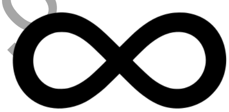
Durante la vida de Euler sucedieron varios hechos notables en América y en el mundo hispano. En 1780, el cacique peruano *José Gabriel Condorcanqui*, también conocido como *Tupac Amaru*, se levantó en armas contra la autoridad colonial. Fue vencido y ejecutado delante de su familia. En 1750 nace en Caracas el prócer de la independencia venezolana *Francisco de Miranda*, y en 1783 nace el Libertador *Simón Bolívar*. El 4 de julio de 1776, las 13 colonias inglesas de Norteamérica declaran su independencia. Ese mismo año, *George Washington* cruza el río Delaware con las fuerzas patriotas, ataca por sorpresa a los ingleses, y los derrota en Trenton.

SECCION 1.1

INTRODUCCIÓN

Se dice que el *cálculo* es el acontecimiento más trascendental en la historia del conocimiento humano, ya que su descubrimiento produjo una revolución científica que nunca se detuvo; desde la revolución industrial, pasando por la ingeniería aeroespacial, hasta los recientes avances en inteligencia artificial.

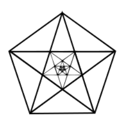


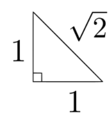


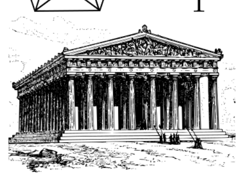
El cálculo nos sorprende con nuevas aplicaciones en cada fase de la humanidad, posicionándose como una fuente *infinita* de evolución para el ser humano; y es precisamente este, el término el que esconde la esencia del cálculo, el **infinito**. Algunos autores le atribuyen al cálculo *el poder de manipular el infinito para resolver problemas humanos.*

Curiosamente, el término *infinito* no fue siempre bien acogido en las esferas científicas. El cálculo pudo manifestarse varios siglos antes de no ser porque en la Antigua Grecia se clasificó al infinito como un tabú.

Las escuelas Griegas más influyentes sustentaban sus argumentos en la premisa de que todo se podía cuantificar en *números naturales* o en sus fracciones, los *números racionales*. Incluso especulaban sobre la existencia de partículas unitarias mínimas *indivisibles* que modelaban todo el plano material al unirse.





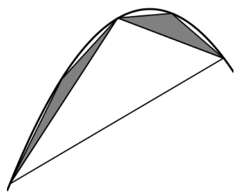


La contradicción de estos argumentos se originó en la **escuela pitagórica**, luego de una revelación que ocasionó la muerte del sabio *Hipaso de Metaponto*, los **números irracionales**. Adoptarlos implicaba aceptar la existencia del infinito, lo que hacía tambalear a una gran cantidad de apartados matemáticos existentes, cuyas demostraciones se volvían paradójicas.

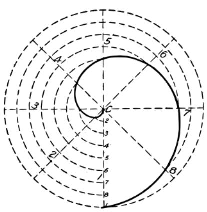
Por añadidura, la concepción "divina" de la unidad mínima absoluta (átomos) también se volvió paradójica al ponerse en manifiesto la existencia de lo infinitamente pequeño y divisible. A esta crisis filosófica le fue conferido el nombre de *horror al infinito.*

Muchos sabios y políticos influyentes intentaron suprimir esta concepción de las academias y, si bien, no cumplieron su objetivo, si lograron relegar su aplicación a métodos netamente geométricos, y con diversas restricciones.

Estas limitaciones no impidieron que el infinito sea empleado en algunos importantes apartados como *el axioma de la continuidad*, *el principio de Euxodo* y el *método de exahusión* de **Arquímedes**, quien en su obra *El Método de Teoremas Mecánicos* propuso una estrategia para encontrar áreas y volúmenes de sólidos haciendo uso del infinito.



En esta obra, Arquimedes aplica números infinitamente pequeños por vez primera en la historia; una genialidad que fue menospreciada, hasta cierto punto, por los griegos, pero que fue desarrollada en Europa siglos después, y evolucionó a lo que hoy conocemos como *números infinitesimales*.



Espiral de Arquímedes

Los infinitesimales fueron de gran utilidad para personajes notables como *Fermat*, quien estuvo muy cerca de descubrir el cálculo. *Newton* y *Leibniz* sí lo lograron, justamente, empleando análisis infinitesimal en el siglo XVII. Por ello el cálculo se conocía, en sus inicios, como **cálculo infinitesimal**.

Los infinitesimales fueron reemplazados por los **límites** en el siglo XIX, abriendo camino al cálculo moderno. Si bien, estos números son un campo de la matemática que no ha perdido vigencia, los límites son más fáciles de representar; pero su mayor ventaja radica en el **rigor** de sus definiciones.

Rigor Matemático e Intuición

El rigor es el planteamiento de un conocimiento (proposición) a través de una serie de argumentos respaldados por razonamientos previos que pueden ser teoremas, definiciones y axiomas. Estos argumentos son conocidos como **pruebas** o **demostraciones**. Por otro lado, cuando hablamos de intuición o razonamiento intuitivo, también hacemos referencia al planteamiento de un conocimiento, pero sin comparecer pruebas o demostraciones, respaldándose unicamente en lo evidente desde el punto de vista sensorial.

En el ámbito matemático el razonamiento intuitivo no es considerado como un razonamiento formal. En las próximas dos secciones nos ocuparemos de estudiar el concepto de *límite* desde ambas perspectivas.

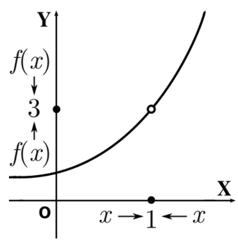
SECCION 1.2

TRATAMIENTO INTUITIVO DE LOS LIMITES

Los primeros rastros de los límites yacen a la Antigua Grecia; no obstante, su formulación rigurosa recién fue lograda en el siglo XIX, en los trabajos de investigación de los matemáticos **Agustín Cauchy** (1789-1857) y **Karl Weierstrass** (1815-1897). El largo lapso entre su aparición y su formulación rigurosa nos da una pista de cuan delicado es este concepto.

Íntimamente ligado al concepto de límite está el concepto de *continuidad*, el cual también abordaremos en este capítulo. En esta sección presentamos el límite desde un enfoque intuitivo, es decir, sin su respectiva demostración. De igual forma presentaremos las principales leyes que gobiernan a este concepto para agilizar la introducción al cálculo de los límites. La justificación rigurosa de todos los argumentos presentados en esta sección será materia de análisis en la próxima sección.

Consideremos la siguiente función:



$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Esta función está definida para todo real, excepto para $x = 1$. Factorizando el numerador tenemos que:

$$f(x) = \frac{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)}{x - 1}$$

Además, para $x \neq 1$, podemos simplificar y obtener:

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1$$

Aunque la función f no está definida en 1, nos interesamos por los valores que toma $f(x)$ cuando x se aproxima a 1, sin llegar a ser 1. Inicialmente nos acercamos a 1 por la izquierda tomando valores menores que 1 para x. Así, por ejemplo:

$$x = 0.8;\ 0.9;\ 0.99;\ 0.999$$

En segundo lugar, nos acercamos a 1 por la derecha tomando valores mayores que 1 para x. Así, por ejemplo:

$$x = 1.2;\ 1.1;\ 1.01;\ 1.001$$

Los valores correspondientes para $f(x)$ los tenemos en la siguiente tabla.

x	0.8	0.9	0.99	0.999	$\to 1 \leftarrow$	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$	2.44	2.71	2.9701	2.997001	$\to 3 \leftarrow$	3.003001	3.0301	3.31	3.64

Con solo ver la tabla o el gráfico de la función observamos que cuando x se aproxima a 1 por la izquierda y por la derecha, pero sin llegar a ser 1, el valor $f(x)$ de la función se aproxima a 3. Este resultado se expresa diciendo que cuando x tiende a 1, el límite de $f(x)$ es 3, lo cual se abrevia así:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

En la discusión anterior hemos hecho hincapié en que al aproximar x a 1, no dejamos que x tome el valor 1, por lo tanto, el valor del límite de $f(x)$, cuando x tiende a 1, depende únicamente de los valores que toma $f(x)$ en los puntos x que están cercanos a 1; siendo irrelevante el hecho de que f esté o no definida en el punto 1. Así, si consideramos esta otra función: $g(x) = x^2 + x + 1$, la cual está definida en todo x, incluyendo $x = 1$, tenemos que las dos funciones:

$$\textbf{(1)} \quad f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1 \quad \text{y} \quad \textbf{(2)} \quad g(x) = x^2 + x + 1$$

son iguales en todo x, excepto en $x = 1$ (f no está definida en 1). La tabla que hemos construido para $f(x)$, también sirve para $g(x)$, ya que en ella no hemos considerado el valor $x = 1$. Por lo tanto, también concluimos que:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \left(x^2 + x + 1\right) = 3$$

Es decir, ambas funciones tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

Ahora ya estamos en capacidad de comprender una definición intuitiva de límite. Al lector amante del *rigor matemático* le pedimos un poco de paciencia.

Definición **No rigurosa de límite.**

Sea f una función que está definida en un intervalo abierto que contiene al punto $\boldsymbol{a}$, excepto posiblemente en el mismo punto a, diremos que el **límite de *f(x)* cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$ es el número $\boldsymbol{L}$**, y escribiremos:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = L,}$$

si cuando x se acerca a $\boldsymbol{a}$, pero sin llegar a ser $\boldsymbol{a}$, $f(x)$ se acerca a L.

Este número L puede o no existir, pero si existe, éste es único; es decir, toda función tiene, a lo más, un límite en un punto dado.

Ejemplo 1.2.1 Hallar el límite:

$$\lim_{x\to -1}(x+3)$$

Solución

Cuando x está cerca de -1, $x+3$ está cerca de $-1+3$, que es igual a 2. Luego:

$$\lim_{x\to -1}(x+3) = 2$$

Ejemplo 1.2.2 Hallar $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, donde:

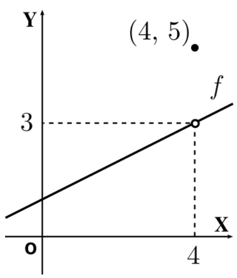
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}+1, & \text{si } x \neq 4 \\ 5, & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

Solución

La función f coincide con la función lineal $g(x) = \dfrac{x}{2}+1$ en todo $\mathbb{R}$, excepto en $x=4$. Luego:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} g(x) = \lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

$$= \frac{4}{2}+1 = 2+1 = 3$$



Ejemplo 1.2.3 **Límite de una función constante**

Sea la función constante $f(x) = c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Probar que:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c}$$

Es decir, el límite de una función constante es la misma constante cuando x tiende a cualquier valor a.

Solución

Como $f(x) = c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, en particular, también tendremos que $f(x) = c$ para los x próximos a a. Luego:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$$

Ejemplo 1.2.4 **Límite de la función Identidad**

Sea la función identidad $I(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Probar que:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} I(x) = \lim_{x \to a} x = a}$$

Es decir que el límite de la función identidad $I(x) = x$ es la misma a cuando x tiende a a.

Solución

Si x se aproxima a a, es evidente que $I(x) = x$ también se aproximará a a. Luego:

$$\lim_{x \to a} I(x) = \lim_{x \to a} (x)$$

LIMITES UNILATERALES

Para hallar el límite de una función en un punto a, nos aproximamos a a por ambos lados, por la izquierda y por la derecha. Si sólo nos aproximamos a a por un solo lado, bien sea por la izquierda o por la derecha, obtendremos un **límite unilateral**.

Definición **Límites unilaterales**

- Sea f una función definida en un intervalo abierto de la forma $\boldsymbol{(b, a)}$; diremos que "*el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a por la izquierda, es* $\boldsymbol{L}$", y escribiremos:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a^-} = L,}$$

siempre que $f(x)$ esté cerca de $\boldsymbol{L}$ cuando x se encuentra cerca de $\boldsymbol{a}$, pero a la izquierda de $\boldsymbol{a}$.

- Sea f una función definida en un intervalo abierto de la forma $\boldsymbol{(a, b)}$; diremos que "*el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a por la derecha, es* $\boldsymbol{L}$", y escribiremos:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a^+} = L}$$

siempre que $f(x)$ esté cerca de $\boldsymbol{L}$ cuando x se encuentra cerca de $\boldsymbol{a}$, pero a la derecha de $\boldsymbol{a}$.

Observe que en ambos límites unilaterales no se asume que la función f esté definida en a. El hecho de que f esté, o no, definida en a es irrelevante para efectos del límite.

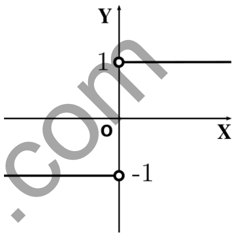
Ejemplo 1.2.5 Si $f(x) = \dfrac{x}{|\,x\,|}$, hallar:

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|\,x\,|}$ **b.** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|\,x\,|}$

Solución

a. Cuando x está a la izquierda de 0, es decir, cuando $x < 0$, se tiene:

$$|\,x\,| = -x \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x}{|\,x\,|} = \frac{x}{-x} = -1$$



En particular, para los x cercanos a 0, y a su izquierda, tenemos que $f(x) = -1$.

Luego, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} = \frac{x}{|\,x\,|} = -1$

b. Cuando x está a la derecha de 0, es decir, cuando $x > 0$, se tiene:

$$|\,x\,| = x \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x}{|\,x\,|} = \frac{x}{x} = 1$$

En particular, para los x cercanos a 0, y a su derecha, tenemos $f(x) = 1$.

Luego, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} = \frac{x}{|\,x\,|} = 1$

Si el límite de una función es el número L, entonces los límites unilaterales también serán L. Del mismo modo, si ambos límites son iguales a un mismo número L, entonces el límite de la función también es L. Este resultado es muy importante, así que lo resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.1 **Límite de una función**

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

El teorema 1.2.1 y el ejemplo 1.2.5 nos dicen que la función:

$$f(x) = \frac{x}{|\,x\,|} \quad \text{no tiene límite en 0.}$$

Surge la interrogante acerca de la posibilidad de que alguna función no tenga uno o ambos limites unilaterales en un determinado punto. La respuesta es afirmativa, y el siguiente ejemplo nos muestra una función que no tiene ningún límite unilateral en 0, por lo tanto, tampoco tiene límite en 0.

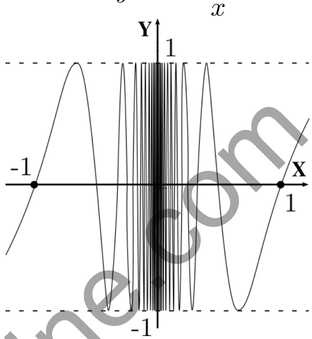
Ejemplo 1.2.6 Probar que no existen los siguientes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$

Solución

Observe detenidamente la peculiar gráfica de la función $y = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

Una estrategia adecuada sería exponer una sucesión infinita de valores de x que se aproximen a 0, tanto por la derecha como por la izquierda; sin embargo, los valores de $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ oscilan entre -1 y 1. Desde ya, esto deja en evidencia que no existe ninguno de los tres límites enunciados.



Sea $x_n = \dfrac{2}{2n+1}$, donde n es un entero. Se tiene que:

$$\frac{\pi}{x_n} = \frac{\pi}{\frac{2}{2n+1}} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

1. Tomamos $x_n = \dfrac{2}{2n+1}$ con $n \geq 0$.
En este caso, a medida que n crece, $x_n = \frac{2}{2n+1}$ se aproxima cada vez más a 0 por la derecha. Pero los valores correspondientes de $\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi}{2}$ son:

$$\operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$

2. Tomamos $x_n = \dfrac{2}{2n+1}$ con $n < 0$.
Como en el caso anterior, a medida que $\mid n \mid = -n$ crece, $x_n = \frac{2}{2n+1}$ se aproxima cada vez más a 0 por la izquierda; pero aquí también se cumple:

$$\operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$

3. Como no existen los límites unilaterales, tampoco existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$

LEYES DE LOS LIMITES

Un resultado importante en la teoría de los límites nos indica que estos se rigen por las operaciones elementales del álgebra; es decir, el límite de una suma, diferencia, producto, cociente o raíz de funciones es igual a la suma, diferencia, producto, cociente o raíz de sus límites. Estos resultados son la *Ley de la Suma*, *Ley de la Diferencia*, *Ley del Producto*, *Ley del Cociente* y *Ley de la Raíz*, respectivamente. Es critico conocerlos en este momento, por lo cual serán presentados de forma precisa en el siguiente teorema; no obstante, su demostración parcial se desarrollará más adelante.

Teorema 1.2.2 **Leyes de los Límites.**

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = G, \quad \text{entonces:}$$

1. $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \pm \left[\lim_{x\to a} g(x)\right] = L \pm G$

2. $\displaystyle\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right] = LG$

3. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{G}, \quad \text{si } G \neq 0$

4. $\displaystyle\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, donde $L \geq 0$ si n es par

NOTA Estas leyes también son válidas para los límites unilaterales.

Ejemplo 1.2.7 Ley del producto de una constante por una función.

Si $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = L}$ y $\boldsymbol{c}$ es una constante, probar que:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}[c\,f(x)] = c\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = cL}$$

Solución

$$\lim_{x\to a}[c\,f(x)] = \left[\lim_{x\to a} c\right]\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = \boldsymbol{cL}$$

Ejemplo 1.2.8 **Ley de la potencia.**

Si $\boldsymbol{\lim_{x\to a} = L}$ y $\boldsymbol{n}$ es un número natural, probar que:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n}$$

En particular, $\boldsymbol{\lim_{x\to a} x^n = a^n}$

Solución

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \lim_{x\to a}\underbrace{f(x)f(x)\ldots f(x)}_{n}$$

$$= \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\ldots\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \quad \text{(Ley del producto)}$$

$$= \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$$

Por el ejemplo 1.2.4, sabemos que:

$$\lim_{x\to a} x = a$$

Luego, reemplazando este resultado en la expresión inicial:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} x^n &= \left[\lim_{x\to a} x\right]^n \\ &= [a]^n \\ &= a^n\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.9 Calcular el límite:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{5x^3}$$

Solución

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{5x^3} = \sqrt{\lim_{x\to 2} 5x^3} \quad \text{(Ley de la raíz)}$$

$$= \sqrt{5\left[\lim_{x\to 2} x^3\right]} \quad \text{(Ejemplo 1.2.7)}$$

$$= \sqrt{5\left[2^3\right]} \quad \text{(Ley de la potencia)}$$

$$= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

El siguiente teorema nos describe una forma de calcular el límite de una función racional y, en particular, el de un polinomio.

Teorema 1.2.3

Si $F(x)$ es una función racional, y a es un punto de su dominio, entonces:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} F(x) = F(a)}$$

Demostración

Caso 1. F es un polinomio $F(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} F(x) &= \lim_{x\to a} \left[b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0\right] \\
&= \left[\lim_{x\to a} b_n x^n\right] + \ldots + \left[\lim_{x\to a} b_1 x^n\right] + \left[\lim_{x\to a} b_0\right] && \text{(Ley de la suma)} \\
&= b_n \left[\lim_{x\to a} x^n\right] + \ldots + b_1 \left[\lim_{x\to a} x\right] + b_0 && \text{(Ejemplo 1.2.7)} \\
&= b_n a^n + \ldots + b_1 a + b_0 && \text{(Ley de la potencia)} \\
&= F(a)
\end{aligned}$$

Caso 2. F es una función racional $F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(a) \neq 0$

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} p(x)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = F(a)$$

Ejemplo 1.2.10 Calcular: $\lim\limits_{x\to 2} \left[4x^3 - 7x^2 + 5x - 1\right]$

Solución

Aplicando el teorema 1.2.3 para el caso de un polinomio:

$$\lim_{x\to 2} \left[4x^3 - 7x^2 + 5x - 1\right] = 4(2)^3 - 7(2)^2 + 5(2) - 1 = 13$$

Ejemplo 1.2.11 Calcular: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{8x^2 - 4x + 2}{x^3 + 5}$

Solución

Aplicando el teorema 1.2.3 para el caso de una función racional:

$$\lim_{x\to -1} \frac{8x^2 - 4x + 2}{x^3 + 5} = \frac{\lim\limits_{x\to -1} \left(8x^2 - 4x + 2\right)}{\lim\limits_{x\to -1} \left(x^3 + 5\right)} = \frac{8(-1)^2 - 4(-1) + 2}{(-1)^3 + 5} = \frac{7}{2}$$

FORMA INDETERMINADA $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

Supongamos que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Si buscamos calcular $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, no podemos contar con la ley del cociente (teorema 1.2.2), ya que la sustitución directa conlleva a la expresión $\frac{0}{0}$, la cual no proporciona suficiente información para encontrar semejante límite. Por esto se dice que este límite es **indeterminado** de la forma $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, o que el límite es de la *forma indeterminada* $\frac{0}{0}$.

Podemos eludir la indeterminación mediante procedimientos geométricos o algebraicos como simplificación, racionalización o cambio de variable. Más adelante veremos que la derivada, el concepto más importante del Cálculo Diferencial, es un límite del tipo $\frac{0}{0}$.

Ejemplo 1.2.12 Hallar: $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

Solución

Este es un límite indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$. Podemos factorizar al numerador para simplificar el cociente:

$$\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = x+4, \quad \text{para} \quad x \neq 4$$

Luego,

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 4+4 = 8$$

Ejemplo 1.2.13 Hallar: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Solución

Este es un caso $\frac{0}{0}$. Racionalizando el numerador para $h \neq 0$, tenemos:

$$\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.2

Problema 1.2.1 Hallar: $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$

Solución

Este es un caso $\frac{0}{0}$. Para $x\neq -2$, tenemos:

$$\frac{x^3+8}{x+2}=\frac{x^3+2^3}{x+2}=\frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{x+2}=x^2-2x+4$$

Luego:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\left(x^2-2x+4\right)=(-2)^2-2(-2)+4=12$$

Problema 1.2.2 Hallar: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^{-3}-2^{-3}}{x}$

Solución

Este un caso $\frac{0}{0}$. Para $x\neq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{(x+2)^{-3}-2^{-3}}{x} &= \frac{\frac{1}{(x+2)^3}-\frac{1}{2^3}}{x} &&= \frac{2^3-(x+2)^3}{2^3x(x+2)^3}\\ &= \frac{2^3-\left[x^3+6x^2+12x+2^3\right]}{2^3x(x+2)^3} &&= -\frac{x^3+6x^2+12x}{2^3x(x+2)^3}\\ &= -\frac{x(x^2+6x+12)}{2^3x(x+2)^3} &&= -\frac{x^2+6x+12}{2^3(x+2)^3}\end{aligned}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^{-3}-2^{-3}}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2+6x+12}{2^3(x+2)^3}=-\frac{0^2+6(0)+12}{2^3(0+2)^3}=-\frac{3}{16}$$

Problema 1.2.3 Hallar: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

Solución

Este un caso $\frac{0}{0}$. Tenemos que:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\Rightarrow a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

Si hacemos el cambio de variables $a = \sqrt[3]{x+h}$ y $b = \sqrt[3]{x}$, en la última igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x} &= \frac{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2} \\ &= \frac{(x+h) - (x)}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2} \\ &= \frac{h}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2}\end{aligned}$$

Luego, para $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} &= \frac{h}{h\left[\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2}\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+0}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x+0}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\end{aligned}$$

Problema 1.2.4 Hallar:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad \text{donde } a > 0$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \frac{\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} = \frac{x - a + \sqrt{x-a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{(x-a)(x+a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{x-a}\sqrt{x-a} + \sqrt{x-a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{(x-a)(x+a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{x-a}\left(\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}\end{aligned}$$

Luego:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt{2a}\,(\sqrt{a}+\sqrt{a})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Observe que solo se pide el límite por la derecha ya que la factorización $x-a = \sqrt{x-a}\sqrt{x-a}$ sólo es posible si $x \geq a$.

Problema 1.2.5 Hallar: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Solución

Esta función con radicales se puede transformar en una función racional mediante un cambio de variable. El fundamento teórico de esta estrategia (Teorema de cambio de variable) será presentado en la próxima sección.

Los radicales tienen índices distintos, 2 y 3, respectivamente. El mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6, por lo que es conveniente hacer el cambio de variable $x+1 = y^6$. Tenemos que:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{y^6} = y^3 \qquad \wedge \qquad \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{y^6} = y^2$$

Ahora:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \frac{y^3-1}{y^2-1} = \frac{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}{(y-1)(y+1)} = \frac{y^2+y+1}{y+1}\ , \quad y \neq 1$$

Como $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 1$, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Problema 1.2.6 Si n es un número natural, probar que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Solución

Por el *binomio de Newton*, sabemos que:

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n$$

Luego, para $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}\\ &= \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h}\\ &= \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}\\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]\\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(0) + \ldots + nx(0)^{n-2} + (0)^{n-1}\\ &= nx^{n-1} + 0 + \ldots + 0 + 0 = nx^{n-1}\end{aligned}$$

Problema 1.2.7 Si el siguiente límite existe, y b es un número real:

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2 + bx + b - 7}{x^2 - x - 6},$$

a. hallar el valor de b.

b. hallar el límite.

Solución

a. Tenemos que $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$.

Para que el límite propuesto exista, el numerador debe poseer un factor $(x+2)$, de modo que obtengamos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que pueda eliminarse simplificando el factor común $(x+2)$. En consecuencia, $x = -2$ debe ser una raíz del numerador. Luego:

$$3(-2)^2 + b(-2) + b - 7 = 0 \Rightarrow b = 5$$

Por lo tanto, para que el límite dado exista, se debe cumplir que $b = 5$, y el numerador debe ser:

$$3x^2 + bx + b - 7 = 3x^2 + 5x + 5 - 7 = 3x^2 + 5x - 2 = (x+2)(3x-1)$$

b. $$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+bx+b-7}{x^2-x-6} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{3x-1}{x-3}$$
$$= \frac{3(-2)-1}{(-2)-3} = \frac{7}{5}$$

$\boxed{\textbf{Problema 1.2.8}}$ Probar que $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 1$ (función piso o parte entera)

Solución

De acuerdo al teorema 1.2.1, es suficiente probar que:

$$\textbf{1.}\ \lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1 \qquad \text{y} \qquad \textbf{2.}\ \lim_{x\to 0^-} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

1. Dado que sólo son de interés los x cercanos a 0, y a su derecha, tomaremos $0 < x < 1$:

$$0 < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1. \quad \text{Luego, si } \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n, \quad \text{entonces } n > 1$$

Pero,

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n \Rightarrow n \leq \frac{1}{x} < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n+1} \qquad (n>1)$$
$$\Rightarrow \frac{n}{n} \geq x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor > \frac{n}{n+1} \Rightarrow 1 \geq x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor > \frac{1}{1+1/n}$$

Como $x \to 0^+ \Leftrightarrow n \to +\infty$, tenemos:

$$1 \geq \lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 1$

2. Dado que sólo son de interés los x cercanos a 0, y a su izquierda, tomaremos $-1 < x < 0$:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < -1. \quad \text{Luego, si } \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n, \quad \text{entonces } n < -1$$

Pero,

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n \Rightarrow n \leq \frac{1}{x} < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n+1} \qquad (n\text{<-1})$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n} \leq x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < \frac{n}{n+1} \Rightarrow 1 \leq x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < \frac{1}{1+1/n}$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$

Problema 1.2.9 Hallar: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\, x+1 \,| - |\, x-1 \,|}{\sqrt{x^2+1}}$

Solución

Como sólo son de interés los x cercanos a 0, tomamos $-1 < x < 1$. En este caso, tenemos:

$$\begin{aligned}
-1 < x < 1 &\Rightarrow -1+1 < x+1 < 1+1 \Rightarrow 0 < x+1 < 2 \\
&\Rightarrow |\, x+1 \,| = x+1 \\
-1 < x < 1 &\Rightarrow -1-1 < x-1 < 1-1 \Rightarrow -2 < x-1 < 0 \\
&\Rightarrow |\, x-1 \,| = -(x-1)
\end{aligned}$$

Luego,

$$|\, x+1 \,| - |\, x-1 \,| = x+1-(-(x-1)) = 2x$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\, x+1 \,| - |\, x-1 \,|}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2(0)}{\sqrt{(0)^2+1}} = \frac{0}{1} = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.2

En los problemas del 1 al 35, hallar el límite indicado.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+6}{x^2-3}$ **2.** $\lim\limits_{y\to 0} \left[\dfrac{y^2-2y+2}{y-4}+1\right]$ **3.** $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{x^2-2}{x^4+x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{2x^2+2}{8x^2+1}}$ **5.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ **6.** $\lim\limits_{y\to -5} \dfrac{y^2-25}{y+5}$

7. $\lim\limits_{h\to 2} \dfrac{h-2}{h^2-4}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$ **9.** $\lim\limits_{y\to -3} \dfrac{y^3+27}{y+3}$

10. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+4x-32}{x-4}$ **11.** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-3}{x+1}$ **12.** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\frac{1}{x+1}+1}{x+2}$

13. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ **14.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$ **15.** $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{16-x^{4/3}}{4-x^{2/3}}$

16. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$ **17.** $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$ **18.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

19. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{y+3}-\sqrt{3}}{y}$ **20.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ **21.** $\lim\limits_{y\to 5} \dfrac{\sqrt{y-1}-2}{y-5}$

22. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h^2}-1}{h}$ **23.** $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ **24.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ **26.** $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ **27.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ **29.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ **30.** $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

31. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ **32.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ **33.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

34. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x^2-ax-x+a}$ **35.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{bx+a}}{\sqrt{cx+d}-\sqrt{dx+c}}$

36. Si $g(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, probar que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}$

37. Si $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$, probar que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

En los problemas del 38 al 54, hallar el límite indicado.

38. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{2x-1}$ **39.** $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-16}}$ **40.** $\lim\limits_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor$

41. $\lim\limits_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor$ **42.** $\lim\limits_{x\to -2^-} \lfloor x \rfloor$ **43.** $\lim\limits_{x\to -2^+} \lfloor x \rfloor$

44. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ **45.** $\lim\limits_{x\to 2^-} (x - \lfloor x \rfloor)$ **46.** $\lim\limits_{x\to 2^+} (x - \lfloor x \rfloor)$

47. $\lim\limits_{x\to 3^-} \left\lfloor x^2 + x + 1 \right\rfloor$ **48.** $\lim\limits_{x\to 3^+} \left\lfloor x^2 + x + 1 \right\rfloor$

49. $\lim\limits_{x\to 3^-} [\lfloor x \rfloor + \lfloor 4 - x \rfloor]$ **50.** $\lim\limits_{x\to 3^+} [\lfloor x \rfloor - \lfloor 4 - x \rfloor]$

51. $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x-4}{|\ x+4\ |}$ **52.** $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{x-1}}$

53. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2} + 2 - x}{\sqrt{4 - x^3/2} + \sqrt{2x - x^2}}$ **54.** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$

55. $h(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ Hallar:
a. $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$ **c.** $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

56. $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ Hallar:
a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **c.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

57. $f(x) = \begin{cases} -4, & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^3}{2}, & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x-1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Hallar:
a. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

58. Hallar una función f tal que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$ y que no exista $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

59. Pruebe, con un contraejemplo, que las proposiciones a continuación son falsas:

a. Existe $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] \Rightarrow$ Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$

b. Existe $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] \Rightarrow$ Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$

60. Probar que:

$$\text{Existe } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \ \text{ y } \ \lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

De esta proposición se obtiene:

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \text{ No existe } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

SECCION 1.3

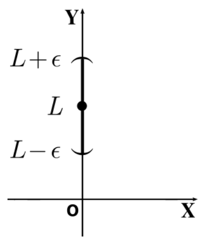
TRATAMIENTO RIGUROSO DE LOS LIMITES

Con la *definición intuitiva* de límite hemos logrado avanzar algunos pasos; lamentablemente, esta no nos llevará muy lejos. Por ejemplo, con esa definición no podemos demostrar las leyes de los límites enunciados en el el teorema 1.2.2. Otra definición un tanto *mejorada*, pero aún no rigurosa, es la siguiente:

> $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *si podemos hacer que los valores de* $f(x)$ *se acerquen arbitrariamente a* L *(tanto como queramos) con sólo tomar un* x *que se encuentre suficientemente cerca de* a*, pero que no sea igual a* a*.*

Ahora daremos una interpretación matemática a esta versión. Para hablar de cercanía necesitamos considerar pequeños números reales positivos que se representan con las letras griegas ϵ (épsilon) y δ (delta).

La frase que dice "*que* $f(x)$ *esté arbitrariamente cerca de* L" quiere decir que si tomamos cualquier número positivo ϵ, por más pequeño que éste sea, la distancia entre $f(x)$ y L, que es $| f(x) - L |$, es menor que ϵ. Esto es:



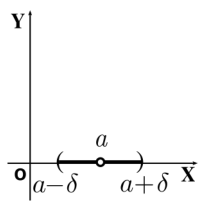
$$| f(x) - L | < \epsilon$$

o su equivalente:

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

Esta última desigualdad advierte que $f(x)$ está en el intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Por otro lado, la frase "*con sólo tomar un* x *suficientemente cerca de* a*, pero no igual a* a" quiere decir que se puede encontrar otro número positivo δ, tal que la distancia entre x y a sea menor que δ, siendo $x \neq a$. Esto es:



$$0 < | x - a | < \delta$$

Esta desigualdad es la conjunción de las dos siguientes:

$$0 < | x - a | \quad \text{y} \quad | x - a | < \delta$$

La primera dice que $x \neq a$.

La segunda dice que la distancia entre x y a es menor que δ.

Definición **Rigurosa de límite.**

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto $\boldsymbol{a}$, excepto posiblemente el punto $\boldsymbol{a}$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ **si para cada** $\epsilon > 0$ **existe un** $\delta > 0$ **tal que**:

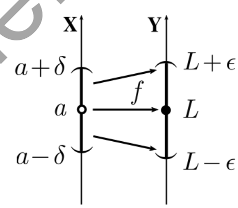
$$\mathbf{0} < | \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} | < \boldsymbol{\delta} \Rightarrow | \boldsymbol{f(x)} - \boldsymbol{L} | < \boldsymbol{\epsilon}$$

De una manera más formal, la definición anterior se escribe simbólicamente de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < | x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \epsilon)$$

Algunas veces, la implicación:

$$0 < | x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \epsilon,$$

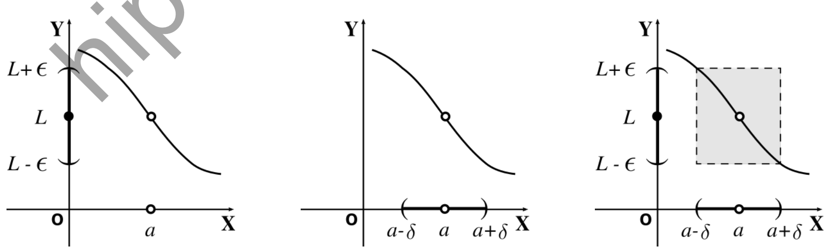


se escribe de la siguiente manera:

$$| f(x) - L | < \epsilon \text{ siempre que } 0 < | x - a | < \delta$$

Interpretación Gráfica de la Definición Rigurosa del Límite

Para cualquier intervalo pequeño $(L - \epsilon,\ L + \epsilon)$, alrededor de $\boldsymbol{L}$, podemos encontrar otro intervalo $(a - \delta,\ a + \delta)$, alrededor de $\boldsymbol{a}$, tal que f lleva todos los puntos de $(a - \delta,\ a + \delta)$, excepto posiblemente a, al intervalo $(L - \epsilon,\ L + \epsilon)$. Esto se representa gráficamente de la siguiente manera:



$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \qquad 0 < | x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \epsilon$$

En la última figura vemos que los puntos $(x, f(x))$ (de la gráfica de f, con $x \neq a$) que se encuentran entre las rectas verticales $x = a - \delta$ y $x = a + \delta$, también se encuentran entre las rectas horizontales $y = L - \epsilon$ e $y = L + \epsilon$.

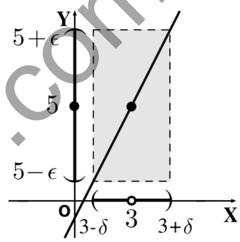
Según esta definición, para probar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, primero se da el número $\epsilon > 0$, y se debe elaborar para producir el número $\delta > 0$ que cumpla:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow\mid f(x) - L \mid< \epsilon$$

Podemos considerar este procedimiento como un juego, *el juego de la prueba del límite*. Partimos de un ϵ cualquiera, y el jugador debe producir el respectivo δ para ganar ¡Empecemos!

Ejemplo 1.3.1 Usando la definición $\epsilon - \delta$, probar que:

$$\lim_{x\to 3}(2x - 1) = 5$$



Solución

Dado un $\epsilon > 0$, debemos hallar un $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - 3 \mid< \delta \Rightarrow\mid (2x - 1) - 5 \mid< \epsilon$$

Cálculos previos. Buscando un valor de $\boldsymbol{\delta}$.

Buscamos δ manipulando la última expresión:

$$\mid (2x - 1) - 5 \mid=\mid 2x - 6 \mid=\mid 2(x - 3) \mid= 2 \mid x - 3 \mid$$

Luego,

$$\mid (2x - 1) - 5 \mid< \epsilon \Leftrightarrow 2 \mid x - 3 \mid< \epsilon \Leftrightarrow\mid x - 3 \mid< \frac{\epsilon}{2}$$

La última expresión nos sugiere que debemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

Prueba Formal. Comprobando que el $\boldsymbol{\delta}$ hallado funciona.

Si dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, entonces:

$$0 <\mid x - 3 \mid< \delta \Rightarrow\mid x - 3 \mid< \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow 2 \mid x - 3 \mid< \epsilon \Rightarrow\mid (2x - 1) - 5 \mid< \epsilon$$

Vemos que con $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ logramos lo que queríamos, que es:

$$0 <\mid x - 3 \mid< \delta \Rightarrow\mid (2x - 1) - 5 \mid< \epsilon$$

Luego,

$$\lim_{x\to 3}(2x - 1) = 5$$

Observación

- La segunda parte de la solución del ejemplo anterior, a la que llamamos *prueba formal*, consiste en recorrer al revés los pasos dados en la primera parte. Esto significa que el verdadero trabajo de la prueba está en los cálculos previos, siendo la segunda parte una simple comprobación. Por esto, más adelante, la prueba de un límite la concluiremos al encontrar el δ de los cálculos previos.

- En el ejemplo anterior hemos encontrado que, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, llegamos a la conclusión que queríamos:

$$0 <\mid x - 3 \mid< \delta \Rightarrow\mid (2x - 1) - 5 \mid< \epsilon$$

Para δ, también se puede tomar cualquier número positivo menor que $\frac{\epsilon}{2}$. En efecto, si tomamos $\delta_1 < \delta = \frac{\epsilon}{2}$, se tiene, por transitividad, que:

$$0 <\mid x - 3 \mid< \delta_1 \Rightarrow 0 <\mid x - 3 \mid< \delta \Rightarrow\mid (2x - 1) - 5 \mid< \epsilon$$

Ejemplo 1.3.2 Si $a > 0$, usando la definición $\epsilon - \delta$, probar que:

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

Solución

Para un $\epsilon > 0$ cualquiera, debemos hallar un $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow\mid \sqrt{x} - \sqrt{a} \mid< \epsilon$$

Cálculos previos. Buscando un valor de $\boldsymbol{\delta}$.

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \left|\frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| \mid x - a \mid\leq \left|\frac{1}{\sqrt{a}}\right| \mid x - a \mid= \frac{1}{\sqrt{a}} \mid x - a \mid$$

En consecuencia:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \epsilon \text{ si } \frac{1}{\sqrt{a}} \mid x - a \mid< \epsilon, \text{ es decir, si } \mid x - a \mid< \epsilon\sqrt{a}$$

Por lo tanto, tomamos $\delta = \epsilon\sqrt{a}$.

Prueba Formal. Comprobando que el $\boldsymbol{\delta}$ encontrado funciona.

Si, dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \epsilon\sqrt{a}$, entonces:

$$0 <\mid x-a \mid < \delta \Rightarrow \mid x-a \mid < \epsilon\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \mid x-a \mid < \epsilon \Rightarrow \left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| < \epsilon$$

Luego, $\displaystyle \lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

Ejemplo 1.3.3 Usando la definición $\epsilon - \delta$, probar que:

$$\lim_{x\to 2} \left(x^2 + x - 1\right) = 5$$

Solución

Debemos demostrar que, dado $\epsilon > 0$, podemos hallar un $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-2 \mid < \delta \Rightarrow \left|\left(x^2+x-1\right)-5\right| < \epsilon \qquad \textbf{(1)}$$

Cálculos previos. Buscando un valor de $\boldsymbol{\delta}$.

Transformamos la expresión (1) en un producto, donde un factor sea $\mid x-2 \mid$:

$$\left|\left(x^2+x-1\right)-5\right| = \left|x^2+x-6\right| = \left|(x+3)(x-2)\right| = \mid x+3 \mid\mid x-2 \mid \qquad \textbf{(2)}$$

Por lo tanto, la expresión (1) se puede escribir de la siguiente manera:

$$0 <\mid x-2 \mid < \delta \Rightarrow \mid x+3 \mid\mid x-2 \mid < \epsilon \qquad \textbf{(3)}$$

Para que esta argumentación sea cierta debemos encontrar un δ que controle el tamaño de ambos factores, $\mid x+3 \mid$ y $\mid x-2 \mid$. La condición $0 <\mid x-2 \mid < \delta$ nos permite controlar el tamaño de $\mid x-2 \mid$, pero no el de $\mid x+3 \mid$. Esta dificultad se puede sortear consiguiendo una constante para la frontera superior de $\mid x+3 \mid$. Es decir, debemos encontrar una constante M tal que:

$$\mid x+3 \mid \leq M, \forall x \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(4)}$$

En los ejemplos anteriores hemos encontrado a M con relativa facilidad (en el ejemplo anterior $M = \frac{1}{\sqrt{a}}$). Lamentablemente, en este caso no existe un $M > 0$ que satisfaga **(4)**; sin embargo, como sólo estamos interesados en los puntos cercanos a 2, buscaremos un M para un intervalo centrado en 2. Así, podemos tomar un numero $0 < \beta < 1$ (a menudo $\beta = 1$), y encontrar un $M > 0$ tal que:

$$\mid x-2 \mid < \beta \Rightarrow \mid x+3 \mid \leq M$$

Encontremos M:

$$\begin{aligned} \mid x-2 \mid< \beta \Rightarrow \quad & \mid x-2 \mid< 1 \Rightarrow \quad -1 < x-2 < 1 \Rightarrow \quad 1 < x < 3 \\ \Rightarrow \quad & 1+3 < x+3 < 3+3 \Rightarrow \quad 4 < x+3 < 6 \\ \Rightarrow \quad & \mid x+3 \mid< 6 \end{aligned}$$

Quiere decir que si tomamos $M = 6$ obtenemos:

$$\mid x-2 \mid< \beta \Rightarrow \mid x+3 \mid< 6 = 4 \qquad (\mathbf{5})$$

De (2) y (5) obtenemos:

$$\mid x-2 \mid< \beta \Rightarrow \left|\left(x^2+x-1\right)-5\right| =\mid x+3 \mid\mid x-2 \mid< 6 \mid x+2 \mid$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mid x-2 \mid< \beta \quad \text{y} \quad 6 \mid x+2 \mid< \epsilon \Rightarrow \left|\left(x^2+x-1\right)-5\right| < \epsilon \\ \Rightarrow \mid x-2 \mid< \beta \quad \text{y} \quad \mid x-2 \mid< \frac{\epsilon}{6} \\ \Rightarrow \left|\left(x^2+x-1\right)-5\right| < \epsilon \qquad (\mathbf{6}) \end{aligned}$$

Ahora tenemos dos restricciones sobre $|x-2|$, que son:

$$\mid x-2 \mid< \beta \qquad \text{y} \qquad \mid x-2 \mid< \frac{\epsilon}{6}$$

Para asegurarnos que ambas desigualdades se cumplan, escogemos como δ al menor (mínimo) de los números β y $\frac{\beta}{6}$. La notación de esta escogencia es:

$$\delta = \text{ Mínimo} \left\{\beta,\, \frac{\epsilon}{6}\right\}.$$

Prueba Formal. Comprobando que el $\boldsymbol{\delta}$ encontrado funciona.

Si dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = $ Mínimo$\{\beta,\, \frac{\epsilon}{6}\}$, entonces, por (5) y (6):

$$0 <\mid x-2 \mid< \delta \Rightarrow \mid x-2 \mid< \beta \quad \text{y} \quad \mid x+3 \mid< \frac{\epsilon}{6} \Rightarrow \left|\left(x^2+x+-1\right)-5\right| < \epsilon$$

Luego:

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2+x-1\right) = 5$$

ESTRATEGIA PARA GANAR EL JUEGO DE LA PRUEBA DEL LIMITE

Para probar que $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = L}$, se siguen 3 pasos:

Paso 1. Sacar el factor $\mid \boldsymbol{x - a} \mid$.

De $\mid f(x) - L \mid$, sacar como factor a $\mid x - a \mid$. Esto es, conseguir una función $g(x)$ tal que:

$$\mid f(x) - L \mid = \mid g(x) \mid \mid x - a \mid$$

Paso 2. Acotar $\mid \boldsymbol{g(x)} \mid$.

Encontrar un número $\beta > 0$ (en la mayoría de los casos, $\beta = 1$) y un número $M > 0$, tal que:

$$0 < \mid x - a \mid < \beta \Rightarrow \mid g(x) \mid \leq M$$

Paso 3. Escoger $\boldsymbol{\delta}$.

Dado $\epsilon > 0$, tomar $\delta = \text{Mínimo}\{\beta, \frac{\epsilon}{M}\}$ ya que, por los pasos 1 y 2:

$$0 < \mid x - a \mid < \delta \Rightarrow |f(x) - L| = \mid g(x) \mid \mid x - a \mid \leq M \mid x - a \mid < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

Es decir: $\quad 0 < \mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon$

Ejemplo 1.3.4 Usando la definición $\epsilon - \delta$, probar que $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = 2$

Solución

Para un $\epsilon > 0$ cualquiera, debemos hallar un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 2\right| < \epsilon$$

Paso 1: Sacar el factor $\mid \boldsymbol{x - \frac{1}{2}} \mid$.

$$\left|\frac{1}{x} - 2\right| = \left|\frac{1 - 2x}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| \mid 2x - 1 \mid = \left|\frac{2}{x}\right| \left|x - \frac{1}{2}\right|$$
$$= \mid g(x) \mid \left|x - \frac{1}{2}\right|, \quad \text{donde } \mid g(x) \mid = \left|\frac{2}{x}\right|$$

Paso 2: Acotar $|\ \boldsymbol{g(x)}\ |$.

Buscamos un $\beta > 0$ y un $M > 0$ tales que:

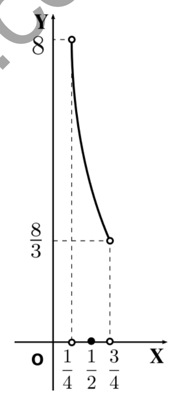
$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \beta \Rightarrow \left| \frac{2}{x} \right| \leq M$$

La expresión $|\ g(x)\ | = \left|\frac{2}{x}\right|$ crece ilimitadamente si x se acerca a 0. Por tanto, debemos alejar a x de 0 para acotarla. Esto lo logramos tomando:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \beta = \frac{1}{4}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{4} \Rightarrow & \quad -\frac{1}{4} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow \quad \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ \Rightarrow & \quad \frac{4}{3} < \frac{1}{x} < 4 \Rightarrow \quad \frac{8}{3} < \frac{2}{x} < 8 \\ \Rightarrow & \quad \frac{8}{3} < \left| \frac{2}{x} \right| < 8 \end{aligned}$$



Es decir, si $\beta = \frac{1}{4}$, conseguimos $M = 8$ tal que:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \left| \frac{2}{x} \right| < M = 8$$

Paso 3: Escoger $\boldsymbol{\delta}$.

Tomamos $\delta =$ Mínimo $\{\beta,\ \epsilon/M\}$ = Mínimo $\{\frac{1}{4},\ \frac{\epsilon}{8}\}$

Comprobando que el $\boldsymbol{\delta}$ encontrado funciona.

$$0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{2}{x} \right| \left| x - \frac{1}{2} \right| < 8\left(\frac{\epsilon}{8}\right) = \epsilon$$

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE LIMITES

Dedicaremos el resto de esta sección a presentar, de forma rigurosa, algunos teoremas de gran importancia para el desarrollo posterior del curso. También saldaremos las deudas contraídas en la sección anterior, como lo son las leyes de los límites (Teorema 1.2.2).

Ejemplo 1.3.5 **Probar la ley de la suma.**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$, probar que:

$$\lim_{x\to a}\left[\, f(x) \pm g(x)\,\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \pm \left[\lim_{x\to a} g(x)\right] = L \pm G$$

Solución

Debemos probar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-a \mid < \delta \Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (L \pm G)| < \epsilon$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, dado $\frac{\epsilon}{2}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-a \mid < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \qquad (1)$$

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$, dado $\frac{\epsilon}{2}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-a \mid < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \frac{\epsilon}{2} \qquad (2)$$

Tomando $\delta = \text{Min}\ \{\delta_1,\, \delta_2\}$, usando (1) y (2) se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 <\mid x-a \mid < \delta \Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (L \pm G)| &= |(f(x) - L) \pm (g(x) - G)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - G| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Teorema 1.3.1

Si $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$, $\forall\, x$ en un intervalo abierto que contiene a $\boldsymbol{a}$, excepto posiblemente en $\boldsymbol{a}$, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

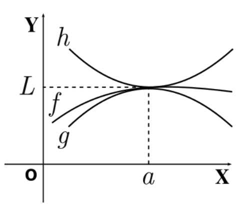
Demostración

Ver el problema resuelto 1.3.12.

Teorema 1.3.2 **Ley del emparedado**.

Si se cumplen las dos condiciones a continuación:

1. $\boldsymbol{g(x) \leq f(x) \leq h(x)}$, $\forall\, x$ en un intervalo abierto que contiene a $\boldsymbol{a}$, excepto posiblemente en $\boldsymbol{a}$.
2. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$



entonces: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Demostración

Aplicando el teorema 1.3.1 se tiene que:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) \leq \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} h(x)$$

$$\Rightarrow L \leq \lim_{x \to a} f(x) \leq L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Ejemplo 1.3.6 Probar que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$

Tenemos que: $0 \leq \dfrac{x^2}{1+x^4} \leq x^2$

Si $f(x) = 0$, $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$ y $h(x) = x^2$, entonces:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Además:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

Luego, por el teorema 1.3.2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$$

Teorema 1.3.3 **Teorema del cambio de variable**.

Si $\boldsymbol{y = f(x)}$ y $\boldsymbol{x = g(t)}$ son tales que $\boldsymbol{\lim_{t \to b} g(t) = a}$ y $\boldsymbol{g(t) \neq a}$, para todo $\boldsymbol{t \neq b}$, entonces:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{t \to b} f\left(g(t)\right) = L}$$

El *cambio de variable* es: $\boldsymbol{x = g(t)}$.

Demostración

Ver el problema resuelto 1.3.13.

LIMITES UNILATERALES

Terminamos la teoría de esta sección presentando las definiciones rigurosas de los límites unilaterales. Para esto, observemos que:

$$\begin{aligned} 0 <\mid x-a \mid< \delta \quad &\Leftrightarrow \quad -\delta < x-a < 0 \quad \wedge \quad 0 < x-a < \delta \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < a-x < \delta \quad \wedge \quad 0 < x-a < \delta \end{aligned}$$

Los x que cumplen con $0 < a - x < \delta$ son los x en el intervalo $(a - \delta,\, a)$; por lo tanto, están a la izquierda de a. En cambio, los x que cumplen con $0 < x - a < \delta$ son los x que están en el intervalo $(a,\, a+\delta)$; por lo tanto, están a la derecha de a.

Definición **Límites Unilaterales**

1. Sea f definida en un intervalo abierto de la forma $(b,\, a)$.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\, \epsilon > 0)(\,\exists\, \delta > 0)\,(0 < a - x < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon)$$

2. Sea f definida en un intervalo abierto de la forma $(a,\, b)$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\, \epsilon > 0)(\,\exists\, \delta > 0)\,(0 < x - a < \delta \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon)$$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.3

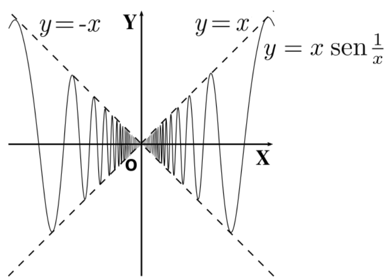
Problema 1.3.1 Probar que $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$

Solución

Observe que no se puede aplicar la ley de producto, ya que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ no existe. Esto se puede comprobar siguiendo la estrategia del ejemplo 1.2.6. así que resolveremos el problema recurriendo a la definición $\epsilon - \delta$.

Dado $\epsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - 0 \mid < \delta \Rightarrow \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$$



Es decir:

$$0 <\mid x \mid < \delta \Rightarrow \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

Pero,

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = \mid x \mid \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq \mid x \mid$$

Luego, para el ϵ dado, tomamos $\delta = \epsilon$.

Problema 1.3.2 Mediante la definición $\epsilon - \delta$, probar que:

$$\lim_{x\to 3} \frac{5}{x-2} = 5$$

Solución

Debemos probar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <| x-3 |< \delta \Rightarrow \left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| < \epsilon$$

Paso 1: Sacar como factor $\boldsymbol{| x-3 |}$

$$\left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| = \left| \frac{5-5(x-2)}{x-2} \right| = \left| \frac{-5(x-3)}{x-2} \right| = \frac{5}{| x-2 |} \mid x-3 \mid$$

Paso 2: Acotamos $\boldsymbol{\dfrac{5}{| x-2 |}}$

Hallamos $\beta > 0$ y $M > 0$ tales que:

$$| x-3 |< \beta \Rightarrow \frac{5}{| x-2 |} \leq M$$

Sea $\beta = \frac{1}{2}$. Tenemos que:

$$| x-3 |< \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 < x-2 < \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < x-2 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} <| x-2 |< \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{| x-2 |} < 2 \Rightarrow \frac{10}{3} < \frac{5}{| x-2 |} < 10$$

Sea $M = 10$. $| x-3 |< \beta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{5}{| x-2 |} < M = 10$

Antes de continuar, observemos que en este caso no podemos tomar $\beta = 1$, ya que, de haberlo hecho, tendríamos que:

$$| x-3 |< 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 0 < x-2 < 2$$

Esta última desigualdad no puede invertirse debido al 0 de la izquierda.

Paso 3: Escogemos $\boldsymbol{\delta}$. Tomamos: $\delta =$ Mínimo $\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{10}\}$.

Comprobando que el $\boldsymbol{\delta}$ escogido funciona.

$$0 <| x-3 |< \delta \Rightarrow| x-3 |< \frac{1}{2} \quad \wedge \quad | x-3 |< \frac{\epsilon}{10}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| = \frac{5}{| x-2 |} \mid x-3 \mid < 10\frac{\epsilon}{10} = \epsilon$$

Problema 1.3.3 Si c es una constante, probar que:

$$| c |< \epsilon, \forall \epsilon > 0 \Rightarrow c = 0$$

Solución

Procedemos por reducción al absurdo. Si suponemos que $c \neq 0$, entonces se tiene que $| c |> 0$. Tomando $\epsilon = \frac{1}{2} | c |$ por hipótesis, se tiene que:

$$| c |< \epsilon \Rightarrow | c |< \frac{1}{2} | c | \Rightarrow 2 | c |<| c | \Rightarrow 2 < 1$$

Esta contradicción comprueba la tesis.

Problema 1.3.4 **Unicidad del Límite.**

Probar que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Solución

De acuerdo al problema anterior, basta probar que:

$$| L_1 - L_2 |< \epsilon, \forall \epsilon > 0, \tag{1}$$

ya que tendríamos:

$$L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Probemos (1)

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, dado $\frac{\epsilon}{2}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 <| x - a |< \delta_1 \Rightarrow | f(x) - L_1 |< \frac{\epsilon}{2} \tag{2}$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, dado $\frac{\epsilon}{2}$,existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 <| x - a |< \delta_2 \Rightarrow | f(x) - L_2 |< \frac{\epsilon}{2} \tag{3}$$

Sumando y restando $f(x)$, y usando la desigualdad triangular:

$$| L_1 - L_2 |= |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq | L_1 - f(x) | + | f(x) - L_2 | \tag{4}$$

Ahora, tomando $\delta =$ Mínimo $\{\delta_1, \delta_2\}$, por (2), (3) y (4), se tiene:

$$0 <| x - a |< \delta \Rightarrow 0 <| x - a |< \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 <| x - a |< \delta_2$$

$$\Rightarrow | L_1 - L_2 |< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Problema 1.3.5

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, probar que existen $\delta > 0$ y $M > 0$, tales que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow\mid f(x) \mid< M$$

Solución

Como $\lim\limits_{x \to a} = f(x) = L$, dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow\mid f(x) - L \mid< 1 \tag{1}$$

Pero, por la desigualdad triangular:

$$\mid f(x) \mid= |(f(x) - L) + L| \leq\mid f(x) - L \mid + \mid L \mid \tag{2}$$

Luego, si $M = 1+ \mid L \mid$, se tiene, de (1) y (2):

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow\mid f(x) \mid< 1+ \mid L \mid= M$$

Problema 1.3.6 **Probar la ley del producto.**

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, probar que:

$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = LG$$

Solución

Debemos probar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow\mid f(x)g(x) - LG \mid< \epsilon$$

Por el problema anterior, existen $\delta' > 0$ y $M > 0$ tales que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta' \Rightarrow\mid f(x) \mid< M \tag{1}$$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, dado $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{2\left(\mid G \mid +1\right)}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta_1 \Rightarrow\mid f(x) - L \mid< \epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2\left(\mid G \mid +1\right)} \tag{2}$$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, dado $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}M$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta_2 \Rightarrow\mid g(x) - G \mid< \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2M} \tag{3}$$

Sumando $f(x)G$ y usando la desigualdad triangular:

$$
\begin{aligned}
| f(x)g(x) - LG | &= |[f(x)g(x) - f(x)G] + [f(x)G - LG]| \\
&= |f(x)\,[g(x) - G]| + |[f(x) - L]\,G| \\
&=| f(x) || g(x) - G | + | f(x) - L || G | \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Ahora, tomando $\delta =$ Min $\{\delta', \delta_1, \delta_2\}$, se tiene que $0 <| x - a |< \delta$:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |f(x)g(x) - LG| &\leq| f(x) || g(x) - G | + | f(x) - L || G | && \text{(por 4)} \\
&\leq M \mid g(x) - G \mid + \mid f(x) - L \mid\mid G \mid && \text{(por 1)} \\
&< M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2\,(\mid G \mid +1)} \mid G \mid && \text{(por 2 y 3)} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

Problema 1.3.7 Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$ y $G \neq 0$, probar que $\exists\,\delta > 0$ tal que:

$$0 <| x - a |< \delta \Rightarrow| g(x) |> \frac{1}{2} \mid G \mid$$

Solución

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$ y $G \neq 0$, dado $\epsilon = \frac{1}{2} \mid G \mid$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0 <| x - a |< \delta \Rightarrow| g(x) - G |< \epsilon = \frac{1}{2} \mid G \mid \qquad (1)$$

Pero:

$$
\begin{aligned}
&| G |=| G - g(x) + g(x) |\leq| G - g(x) | + | g(x) | \\
&\Rightarrow| g(x) |\geq| G | - | G - g(x) | \qquad (2)
\end{aligned}
$$

De (1) y (2):

$$0 <| x - a |< \delta \Rightarrow| g(x) |\geq| G | - | G - g(x) |>| G | -\frac{1}{2} \mid G \mid= \frac{1}{2} \mid G \mid$$

Problema 1.3.8 Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$ y $G \neq 0$, probar que:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{1}{G}$$

Solución

Debemos probar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \epsilon$$

Bien, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| &= \left| \frac{G - g(x)}{g(x)G} \right| = \left| \frac{1}{g(x)G} \right| \mid g(x) - G \mid \\ &= \frac{1}{\mid g(x) \mid} \frac{1}{\mid G \mid} \mid g(x) - G \mid \qquad (1) \end{aligned}$$

Por el problema anterior, existe un $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta_1 \Rightarrow\mid g(x) \mid> \frac{1}{2} \mid G \mid\Rightarrow \frac{1}{\mid g(x) \mid} < \frac{2}{\mid G \mid} \qquad (2)$$

De (1) y (2): $0 <\mid x - a \mid< \delta_1$:

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \frac{2}{\mid G \mid} \frac{1}{\mid G \mid} \mid g(x) - G \mid= \frac{2}{G^2} \mid g(x) - G \mid \qquad (3)$$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, dado $\epsilon' = \dfrac{\epsilon G^2}{2}$, existe un $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow |g(x) - G| < \epsilon' = \frac{\epsilon G^2}{2} \qquad (4)$$

Luego, tomando $\delta =$ Mínimo $\{\delta_1, \delta_2\}$, por (3) y (4), tenemos que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \frac{2}{G^2} \mid g(x) - G \mid< \frac{2}{G^2} \frac{\epsilon G^2}{2} = \epsilon$$

Problema 1.3.9 **Probar la ley del cociente.**

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G \neq 0$, probar que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{G}$$

Solución

Esta prueba será corta debido a que la parte laboriosa de la demostración ya está hecha. Por la *ley del producto* y por el problema anterior tenemos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[f(x)\frac{1}{g(x)}\right]=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]\left[\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\right]$$
$$=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]\left[\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\right]=L\frac{1}{G}=\frac{L}{G}$$

$\boxed{\textbf{Problema 1.3.10}}$ Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ y $A<L<B$, probar que:

$$\exists\,\delta>0,\quad \text{tal que:}\quad 0<\mid x-a\mid<\delta\Rightarrow A<f(x)<B$$

Solución

$$A<L<B\Rightarrow B-L>0 \quad \text{y} \quad L-A>0$$

Si $\epsilon=$ Mínimo $\{B-L,\, L-A\}$, entonces:

$$B-L\leq\epsilon \;\text{ y }\; L-A\leq\epsilon \tag{1}$$

Dado que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$, entonces, dado $\epsilon=$ Mínimo $\{B-L,\, L-A\}$, existe un $\delta>0$, tal que:

$$\begin{aligned}0<\mid x-a\mid<\delta &\Rightarrow\mid f(x)-L\mid<\epsilon\Rightarrow-\epsilon<f(x)-L<\epsilon\\ &\Rightarrow-\epsilon+L<f(x)<\epsilon+L\\ &\Rightarrow-(L-A)+L<f(x)<(B-L)+L \qquad \text{(por 1)}\\ &\Rightarrow A<f(x)<B\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Problema 1.3.11}}$ **Probar la ley de la raíz**.

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$, entonces:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{L},\quad \text{donde } L>0 \text{ si } n \text{ es par.}$$

Solución

Caso 1: $L=0$ y n es impar.

Como $\sqrt[n]{L}=\sqrt[n]{0}=0$, entonces debemos probar que, dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que:

$$0<\mid x-a\mid<\delta\Rightarrow\left|\sqrt[n]{f(x)}\right|<\epsilon$$

Pues bien, dado que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, entonces existe un $\delta > 0$ para $\epsilon_1 = \epsilon^n > 0$, tal que:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon_1 = \epsilon^n \Rightarrow \left|\sqrt[n]{f(x)}\right| < \epsilon$$

Caso 2: $L > 0$ y n par o impar.

Debemos probar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta \Rightarrow \left|\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L}\right| < \epsilon$$

Bien, por el problema anterior, con $A = \frac{1}{2}L$ y $B = \frac{3}{2}L$, existe $\delta_1 > 0$

$$\text{tal que:} \quad 0 <\mid x-a \mid< \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{2}L < f(x) < \frac{3}{2}L,$$

por lo tanto:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta_1 \Rightarrow f(x) > 0 \tag{1}$$

Por otro lado, usando la identidad:

$$p - q = \frac{p^n - q^n}{p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + pq^{n-2} + q^{n-1}},$$

con $p = \sqrt[n]{f(x)}$ y $q = \sqrt[n]{L}$, se tiene:

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L}\\ &= \frac{f(x) - L}{\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \ldots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}}}\end{aligned} \tag{2}$$

Cuando $0 <\mid x-a \mid< \delta_1$, por (1), $f(x) > 0$; además $L > 0$. Por lo tanto, todas las raíces del denominador de la expresión (2) son positivas. En consecuencia:

$$\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \ldots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}} \geq \sqrt[n]{L^{n-1}}$$

Luego, cuando $0 <\mid x-a \mid< \delta_1$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \ldots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}}}\\ &\qquad \leq \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}}\end{aligned} \tag{3}$$

De (2) y (3) obtenemos:

$$0 < \mid x - a \mid < \delta_1 \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} \right| \leq \frac{\mid f(x) - L \mid}{\sqrt[n]{L^{n-1}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} \mid f(x) - L \mid \qquad (4)$$

Ahora, como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, dado $\epsilon_1 = \epsilon \sqrt[n]{L^{n-1}}$, existe $\delta_2 > 0$, tal que:

$$0 < \mid x - a \mid < \delta_2 \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon \sqrt[n]{L^{n-1}} \qquad (5)$$

En consecuencia, tomando $\delta =$ Mínimo $\{\delta_1, \delta_2\}$, de (4) y (5) se tiene que:

$$0 < \mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} \mid f(x) - L \mid$$
$$< \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} \epsilon \sqrt[n]{L^{n-1}} = \epsilon$$

Caso 3: $L < 0$ y n es impar.

Sea $g(x) = -f(x)$. Se tiene que:

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} (-f(x)) = -\lim_{x \to a} f(x) = -L > 0$$

Luego, por el caso 2 y considerando que n es impar, se tiene que:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{-L} \Rightarrow \lim_{x \to a} \sqrt[n]{-f(x)} = \sqrt[n]{-L} \Rightarrow -\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = -\sqrt[n]{L}$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Problema 1.3.12 **Probar el teorema 1.3.1**.

Si $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$, $\forall\, x$ en un intervalo abierto que contiene a $\boldsymbol{a}$, excepto posiblemente en $\boldsymbol{a}$, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Solución

Paso 1: Probamos que $0 \leq h(x) \Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{x \to a} h(x)$

Sea $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$. Queremos probar que $0 \leq L$, así que aplicaremos *reducción al absurdo*. Supongamos que $L < 0$, entonces $-L > 0$.

Ahora, dado $\epsilon = \frac{1}{2}(-L)$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$0 <\mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid h(x) - L \mid < \epsilon = \frac{1}{2}(-L)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(-L) < h(x) - L < \frac{1}{2}(-L)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(-L) + L < h(x) < \frac{1}{2}(-L) + L$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}L < h(x) < \frac{1}{2}L \Rightarrow h(x) < 0 \qquad (\tfrac{1}{2}L < 0)$$

Este último resultado contradice la hipótesis: $0 \leq h(x)$.

Paso 2: Probamos que $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow 0 \leq g(x) - f(x) \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \to a} [g(x) - f(x)] \qquad \text{(paso 1)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \to a} g(x) - \lim_{x \to a} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Problema 1.3.13 **Probar el teorema 1.3.3.**

Si $\boldsymbol{y = f(x)}$ y $\boldsymbol{x = g(t)}$ son tales que $\boldsymbol{\lim\limits_{t \to b} g(t) = a}$ y $\boldsymbol{g(t) \neq a}$, para todo $\boldsymbol{t \neq b}$, entonces:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{t \to b} f(g(t)) = L}$$

El **cambio de variable** es: $\boldsymbol{x = g(t)}$.

Solución

Debemos probar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$0 <\mid x - b \mid < \delta \Rightarrow \mid f(g(t)) - L \mid < \epsilon$$

Bien, como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que:

$$0 <\mid x - a \mid < \delta_1 \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon \qquad (1)$$

Por otro lado, como $\lim\limits_{t \to b} g(t) = a$, dado $\epsilon_1 = \delta_1 > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$0 <\mid t - b \mid < \delta \Rightarrow \mid g(t) - a \mid < \epsilon_1 = \delta_1 \qquad (2)$$

Además, dado que $g(t) \neq a$ para todo $t \neq b$, podemos escribir la expresión (2) de la siguiente manera:

$$0 <\mid t - b \mid < \delta \Rightarrow 0 <\mid g(t) - a \mid < \epsilon_1 = \delta_1 \qquad (3)$$

Luego, de (3) y (1), por transitividad y considerando que $x = g(t)$, se tiene:

$$0 <\mid t - b \mid < \delta \Rightarrow \mid f(g(t)) - L \mid < \epsilon$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.3

En los problemas del 1 al 14, pruebe el límite empleando $\epsilon - \delta$.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(4x-3)=5$ **2.** $\lim\limits_{t\to 4}(9-3t)=-3$ **3.** $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x}{5}+1\right)=\dfrac{3}{5}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$ **5.** $\lim\limits_{x\to -2} x^3=-8$ **6.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

7. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-6)=-3$ **8.** $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+3x-4)=-5$ **9.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{x-1}=2$

10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{6}{4-x}=-6$ **11.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{5-2x}=\dfrac{2}{3}$ **12.** $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x+5}=3$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\mid x\mid+1}=1$ **14.** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{1+x}{x}=4$

En los problemas del 15 al 19, pruebe el límite empleando $\epsilon - \delta$.

15. $\lim\limits_{x\to a} c=c$, c es una constante. **16.** $\lim\limits_{x\to a} x=a$

17. $\lim\limits_{x\to a} x^n=a^n$.

Sugerencia: $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})$

18. $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$.

Sugerencia: seguir la estrategia del ejemplo 1.2.4 tomando $\beta=\frac{|a|}{2}$

19. Probar: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\mid f(x)\mid=\mid L\mid$.

Sugerencia: $\mid\mid f(x)\mid-\mid L\mid\mid\leq\mid f(x)-L\mid$

En los problemas del 20 al 23, pruebe el límite empleando el teorema 1.3.2 (Ley del Emparedado)

20. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$ **21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\mid x\mid+1}=1$

22. $\lim\limits_{x\to 0} x\left[2-\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=0$ **23.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mid x+1\mid-\mid x-1\mid}{\sqrt{3x^2+1}}=0$

SECCION 1.4

LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

Teorema 1.4.1 $\displaystyle \lim_{\theta\to a} \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} a, \quad \lim_{\theta\to a} \cos\theta = \cos a, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

Demostración

Debemos probar que: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$0 <\mid \theta - a \mid< \delta \Rightarrow\mid \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} a \mid< \epsilon \qquad (1)$$

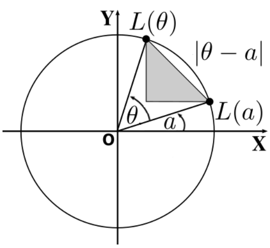
y

$$0 <\mid \theta - a \mid< \delta \Rightarrow\mid \cos\theta - \cos a \mid< \epsilon \qquad (2)$$

Observe con detenimiento el triángulo rectángulo sombreado en la siguiente figura. Los extremos de la hipotenusa son los puntos:

$$\boldsymbol{L(\theta) = (\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{L(a) = (\cos a,\ \operatorname{sen} a)}$$

Además:



- la longitud del cateto vertical es:

  $$\mid \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} a \mid$$

- la longitud del cateto horizontal es:

  $$\mid \cos\theta - \cos a \mid$$

- la longitud de la hipotenusa es $d\,(L(a),\, L(\theta))$
- la longitud del arco, entre $L(a)$ y $L(\theta)$, es $\mid \theta - a \mid$
- la longitud de la hipotenusa es menor que el arco entre $L(a)$ y $L(\theta)$, es decir:

$$d\,(L(\theta),\, L(a)) <\mid \theta - a \mid \qquad (3)$$

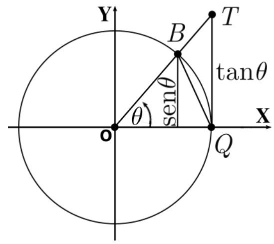
Dado que la longitud de cada cateto es menor que longitud de la hipotenusa, tenemos, por (3), que:

$$\mid \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} a \mid<\mid \theta - a \mid \quad \text{y} \quad \mid \cos\theta - \cos a \mid<\mid \theta - a \mid$$

Si para el $\epsilon > 0$ dado, tomamos $\delta = \epsilon$, entonces las expresiones (1) y (2) quedan satisfechas.

Teorema 1.4.2 $\quad \displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Demostración



Paso 1. $\displaystyle \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

Sean:

- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Que implica que $\operatorname{sen}\theta > 0$.
- $\triangle \mathrm{O}QB$: triangulo que tiene por vértices al Origen y a los puntos Q y B.
- $\triangle \mathrm{O}QT$: triangulo que tiene por vértices al Origen y a los puntos Q y T.
- $\widehat{\mathrm{O}QB}$: el sector circular formado por el Origen y los puntos Q y B.

Observando la figura es evidente que:

$$\text{Area de } \triangle \mathrm{O}QB < \text{Area de } \widehat{\mathrm{O}QB} < \text{Area de } \triangle \mathrm{O}QT$$

Pero,

$$\text{Area de } \triangle \mathrm{O}QB = \frac{(1)\operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}$$

$$\text{Área del sector circular } \widehat{\mathrm{O}QB} = \frac{1}{2}(1)^2(\theta) = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Área de } \triangle \mathrm{O}QT = \frac{1}{2}(1)\tan\theta = \frac{\tan\theta}{2}$$

Luego:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\tan\theta}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta < \theta < \tan\theta$$

Ahora dividimos entre $\operatorname{sen}\theta$ (recordar que $\operatorname{sen}\theta > 0$).

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1 \qquad \text{(invirtiendo fracciones)}$$

Pero,

$$\lim_{\theta \to 0^+} 1 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \to 0^+} \cos\theta = \cos 0 = 1 \qquad \text{(Teorema 1.4.1)}$$

Luego, por la ley del emparedado (teorema 1.3.2):

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Paso 2. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=1$

Sea $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$, por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta<0$.

Si $\alpha=-\theta$, entonces $\alpha>0$ y $\alpha\to 0^+\Leftrightarrow\theta\to 0^-$. Luego:

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0^-}\frac{-\operatorname{sen}\theta}{-\theta}=\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta}=\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}=1$$

Ejemplo 1.4.1 Probar que:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=a$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\cot ax=\frac{1}{a},\ a\neq 0$

Solución

Si $\theta=ax$, entonces $x\to 0\Leftrightarrow\theta\to 0$. Luego:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=\lim_{x\to 0}(a)\frac{\tan ax}{ax}=a\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}ax}{ax}\frac{1}{\cos ax}=a\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=a\left[\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right]\left[\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}\right]=a[1]\left[\frac{1}{1}\right]=a$$

2. $$\lim_{x\to 0}x\cot ax=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan ax}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\tan ax}{x}}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}}=\frac{1}{a}$$

Teorema 1.4.3

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0}$$

Demostración

$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos x}{x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}x}{x}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\right]=[1]\left[\frac{0}{2}\right]=0$$

Ejemplo 1.4.2 Hallar $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{6})}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Solución

Sea $y = x - \dfrac{\pi}{6}$. Se tiene que:

$$x = y + \frac{\pi}{6}, \quad x \to \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow y \to 0$$

Además:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{6})}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} &= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{\cos(y+\frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos y - \left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} y - \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[\cos y - 1] - \left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[-\left(\dfrac{1-\cos y}{y}\right)\right] - \left(\frac{1}{2}\right)\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[-(0)] - \left(\frac{1}{2}\right)(1)} = -2 \qquad \text{(teoremas 1.4.2 y 1.4.3)}
\end{aligned}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.4

Problema 1.4.1 Hallar $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$

Solución

Si $t = x - 1$, entonces $x = t + 1$ y $t \to 0 \Leftrightarrow x \to 1$. Luego:

$$\begin{aligned}
(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x = -t\tan\frac{\pi}{2}(t+1) &= -t\tan\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= t\cot\left(\frac{\pi}{2}t\right) \qquad \text{(id. Trigonometrica 19)}
\end{aligned}$$

Ahora bien, tomando en cuenta la parte 2 del ejemplo 1.4.1, tenemos:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x = \lim_{t\to 0} t\cot\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Problema 1.4.2 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

Solución

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} &= \frac{(\cos mx - \cos nx)(\cos mx + \cos nx)}{x^2(\cos mx + \cos nx)}\\
&= \frac{\cos^2 mx - \cos^2 nx}{x^2(\cos mx + \cos nx)}\\
&= \frac{\left(1-\operatorname{sen}^2 mx\right) - \left(1-\operatorname{sen}^2 nx\right)}{x^2(\cos mx + \cos nx)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 nx - \operatorname{sen}^2 mx}{x^2(\cos mx + \cos nx)}\\
&= \left[\frac{\operatorname{sen}^2 nx}{x^2} - \frac{\operatorname{sen}^2 mx}{x^2}\right]\frac{1}{\cos mx + \cos nx}\\
&= \left[n^2\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{nx}\right)^2 - m^2\left(\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}\right)^2\right]\frac{1}{\cos mx + \cos nx}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left[n^2\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{nx}\right)^2 - m^2\left(\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}\right)^2\right]\frac{1}{\cos mx + \cos nx}\\
&= \left[n^2(1)^2 - m^2(1)^2\right]\frac{1}{1+1} = \frac{n^2-m^2}{2}
\end{aligned}$$

Problema 1.4.3 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a\operatorname{sen} x - x\operatorname{sen} a}{a\cos x - x\cos a}$

Solución

Si $x = y + a$, entonces $y = x - a \quad$ y $\quad x \to a \Leftrightarrow y \to 0$.

Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{a\operatorname{sen}x - x\operatorname{sen}a}{a\cos x - x\cos a} &= \frac{a\operatorname{sen}(y+a) - (y+a)\operatorname{sen}a}{a\cos(y+a) - (y+a)\cos a}\\
&= \frac{(a\operatorname{sen}y\cos a + a\cos y\operatorname{sen}a) - (y\operatorname{sen}a + a\operatorname{sen}a)}{(a\cos y\cos a - a\operatorname{sen}y\operatorname{sen}a) - (y\cos a + a\cos a)}\\
&= \frac{(a\operatorname{sen}y\cos a - y\operatorname{sen}a) + (a\cos y\operatorname{sen}a - a\operatorname{sen}a)}{(a\cos y\cos a - a\cos a) - (a\operatorname{sen}y\operatorname{sen}a + y\cos a)}\\
&= \frac{(a\operatorname{sen}y\cos a - y\operatorname{sen}a) + a\operatorname{sen}a(\cos y - 1)}{a\cos a(\cos y - 1) - (a\operatorname{sen}y\operatorname{sen}a + y\cos a)}\\
&= \frac{\frac{(a\operatorname{sen}y\cos a - y\operatorname{sen}a)}{y} + \frac{(a\operatorname{sen}a)(\cos y - 1)}{y}}{\frac{(a\cos a)(\cos y - 1)}{y} - \frac{(a\operatorname{sen}y\operatorname{sen}a + y\cos a)}{y}}\\
&= \frac{\left(a\frac{\operatorname{sen}y}{y}\cos a - \operatorname{sen}a\right) + (a\operatorname{sen}a)\frac{(\cos y - 1)}{y}}{(a\cos a)\frac{(\cos y - 1)}{y} - \left(a\frac{\operatorname{sen}y}{y}\operatorname{sen}a + \cos a\right)}
\end{aligned}$$

En esta última expresión, tomando el límite cuando $y \to 0$, se tiene:

$$\frac{(a(1)\cos a - \operatorname{sen}a) + (a\operatorname{sen}a)(0)}{(a\cos a)(0) - (a(1)\operatorname{sen}a + \cos a)} = \frac{a\cos a - \operatorname{sen}a}{-a\operatorname{sen}a - \cos a} = \frac{\operatorname{sen}a - a\cos a}{a\operatorname{sen}a + \cos a}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to a}\frac{a\operatorname{sen}x - x\operatorname{sen}a}{a\cos x - x\cos a} = \frac{\operatorname{sen}a - a\cos a}{a\operatorname{sen}a + \cos a}$$

Problema 1.4.4 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} &= \frac{[\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}a]\,[\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}a]}{[x+a][x-a]}\\
&= \frac{\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right)\right]\,\left[2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right]}{[x+a][x-a]} \quad \text{(id.Trig. 40 y 41)}
\end{aligned}$$

Si $y = \dfrac{x-a}{2}$, entonces:

$$x - a = 2y,\ x + a = 2(y+a),\ \frac{x+a}{2} = y + a$$

Luego:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} = \frac{[2\operatorname{sen}(y+a)\cos(y)]\,[2\cos(y+a)\operatorname{sen}(y)]}{[2(y+a)][2y]}$$

$$= \left[\frac{\operatorname{sen}(y+a)\cos(y)}{y+a}\right]\left[\cos(y+a)\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\right]$$

Pero $x \to a \Leftrightarrow y \to 0$. Luego:

$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} = \lim_{y\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(y+a)\cos(y)}{y+a}\right]\left[\cos(y+a)\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\right]$$

$$= \left[\frac{\operatorname{sen}(a)(1)}{a}\right][\cos(a)(1)] = \frac{\operatorname{sen} a \cos a}{a} = \frac{\operatorname{sen} 2a}{2a}$$

Problema 1.4.5 Hallar $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2}{2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2}$

Solución

Si $y = \cos\theta$, entonces:

$$\theta \to \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow y \to \frac{1}{2}$$

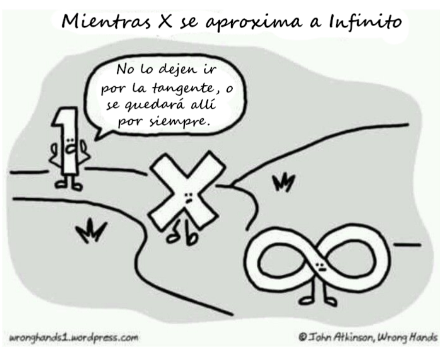
Luego:

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2}{2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2} = \lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{2y^2 - 5y + 2}{2y^2 + 3y - 2}$$

$$= \lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{(2y-1)(y-2)}{(2y-1)(y+2)}$$

$$= \lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{y-2}{y+2} = \frac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}+2} = -\frac{3}{5}$$

Humor en tiempos de ciencia



PROBLEMAS PROPUESTOS 1.4

En los problemas del 1 al 22, hallar el límite indicado.

1. $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$ **3.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{4x^2}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}[\tan 2x-\sec 2x]$ **5.** $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t}$ **6.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen} x}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}^2(x-1)}{x^2-2x+1}$ **8.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} 2x}{x-\operatorname{sen} 3x}$ **9.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$ **11.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos 2x}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$ **13.** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{\cos x}}{x^2}$ **15.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

16. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\tan^5\theta-\tan^3\theta}$ **17.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\tan x}$

18. $\displaystyle\lim_{\theta\to a}\frac{\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)}$ **19.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{\tan(a+x)-\tan(a-x)}$ **21.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\operatorname{sen}^2 x-3\operatorname{sen} x+1}{2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-1}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\tan^2 x-\tan x-1}{2\tan^2 x-3\tan x+1}$

SECCION 1.5

CONTINUIDAD

La *continuidad* es muy fácil de describir desde el punto de vista geométrico, ya que una función es continua si su gráfico no tiene saltos o interrupciones; es decir, si su gráfico puede ser trazado sin levantar el lápiz del papel.

Definición Una función f es **continua** en un punto $\boldsymbol{a}$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Esta definición es equivalente al cumplimiento de tres condiciones:

1. f está definida en a $(\exists\, f(a))$

2. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

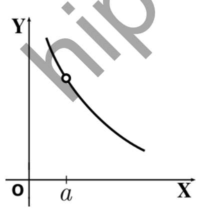
La definición de continuidad en $\boldsymbol{a}$, al referirse a $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, implícitamente exige que f debe estar definida en un intervalo abierto que contenga a $\boldsymbol{a}$.

Definición

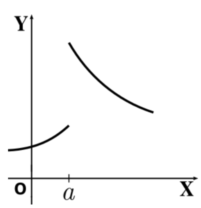
Diremos que $\boldsymbol{f}$ es **discontinua** en el punto $\boldsymbol{a}$, o que $\boldsymbol{a}$ es un **punto de discontinuidad** de f, si f no es continua en a.

Lo anterior equivale a decir que al menos una de las tres condiciones exigidas en la definición no se cumple. Esto es:

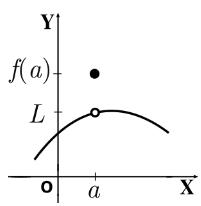
$\boldsymbol{f}$ no esta definida en $\boldsymbol{a}$



no existe limite en $\boldsymbol{a}$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$



Si f es discontinua en a y existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, diremos que la discontinuidad en a es **removible**. Se le dice así debido a que se puede redefinir a f en a para eliminar la discontinuidad. Es claro que dicha *redefinición* debe ser del modo siguiente:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

La discontinuidad es **esencial** si no existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. En este caso no hay manera de salvar la discontinuidad.

La continuidad se expresa también en términos de $\epsilon - \delta$ como sigue a continuación (ver el problema resuelto 1.5.3):

$$f \text{ es continua en } a \Leftrightarrow (\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon)$$

Observación

- El teorema 1.2.3 nos dice que toda función racional (en particular, todo polinomio) es continua en cualquier punto a de su dominio.
- El teorema 1.4.1 nos dice que las funciones seno y coseno son continuas en cualquier punto a de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.5.1 Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & \text{si } \; x \neq 4 \\ 6, & \text{si } \; x = 4 \end{cases}$

1. probar que f tiene una discontinuidad removible en $a = 4$.

2. redefinir f para remover la discontinuidad.

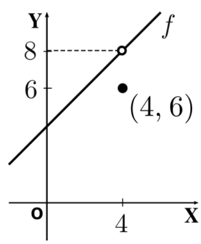
3. probar que f es continua en cualquier punto $a \neq 4$.

Solución

1. La primera condición de continuidad se cumple, ya que f está definida en 4. En efecto: $f(4) = 6$.

La segunda condición también se cumple:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x + 4) = 8$$



Sin embargo, la tercera condición no se cumple, ya que:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 8 \neq 6 = f(4)$$

En consecuencia, f tiene una discontinuidad removible en $a = 4$.

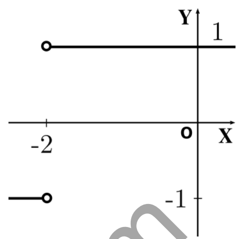
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & \text{si } \; x \neq 4 \\ 8, & \text{si } \; x = 4 \end{cases}$

3. Para los $x \neq 4$, f es la función racional $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ cuyo denominador no se anula en ningún $x \neq 4$. Luego, por el ejemplo anterior, f es continua en cualquier punto $x \neq 4$.

Ejemplo 1.5.2

Probar que la siguiente función tiene una discontinuidad esencial en -2:

$$g(x) = \frac{x+2}{|\, x+2 \,|}$$



Solución

Calculemos los límites unilaterales.

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{|\, x+2 \,|} = \lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \to -2^+} (1) = 1$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{|\, x+2 \,|} = \lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{-(x+2)} = \lim_{x \to -2^-} (-1) = -1$$

Dado que estos límites unilaterales son distintos, concluimos que g no tiene límite en el punto -2. Por consiguiente, g tiene una discontinuidad esencial en este punto.

CONTINUIDAD LATERAL

Definición

1. Una función $\boldsymbol{f}$ es **continua por la derecha** en el punto $\boldsymbol{a}$ si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

2. Una función $\boldsymbol{f}$ es **continua por la izquierda** en un punto $\boldsymbol{a}$ si:

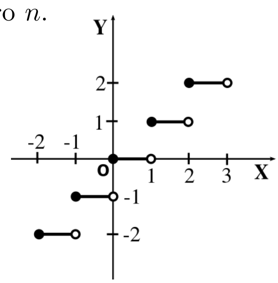
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Es evidente que:

$$\boldsymbol{f \text{ es continua en } a} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ es continua por la izquierda en } a \\ \text{y} \\ f \text{ es continua por la izquierda en } a \end{cases}$$

Ejemplo 1.5.3

La función parte entera (o piso) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es continua por la derecha pero discontinua por la izquierda en cualquier entero n.



En efecto, tenemos que:

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n = f(n)$$

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \neq f(n)$$

Ejemplo 1.5.4 Tomando la función del ejemplo 1.5.2:

$$g(x) = \frac{x+2}{\mid x+2 \mid}$$

1. redefinir g para que ésta sea continua por la derecha en $a = -2$

2. redefinir g para que ésta sea continua por la izquierda en $a = -2$

Solución

1. $g_1(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x+2|}, & \text{si } x \neq -2 \\ 1, & \text{si } x = -2 \end{cases}$ **2.** $g_2(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x+2|}, & \text{si } x \neq -2 \\ -1, & \text{si } x = -2 \end{cases}$

Ejemplo 1.5.5

Probar que la función valor absoluto $f(x) = \mid x \mid$ es continua en cualquier punto de $\mathbb{R}$.

Solución

Sea a un punto cualquiera de $\mathbb{R}$.

Caso 1. $\boldsymbol{a = 0}$ **:** $\lim\limits_{x \to 0} \mid x \mid = 0 = \mid 0 \mid$, ya que:

$$\lim_{x \to 0^+} \mid x \mid = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = \mid 0 \mid \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \mid x \mid = \lim_{x \to 0^-} (-x) = -0 = 0 = \mid 0 \mid$$

Caso 2. $\boldsymbol{a \neq 0}$ **:** $f(x) = \mid x \mid$ es continua en a debido a que, cerca de a, la función f coincide con el polinomio $p(x) = x$ si $a > 0$; o con el polinomio $q(x) = -x$ si $a < 0$.

CONTINUIDAD EN INTERVALOS

Definición

- La función f es **continua en el intervalo abierto** $\boldsymbol{(a, b)}$ si f es continua en todo punto de este intervalo.
- La función f es **continua en el intervalo** $\boldsymbol{[a, b)}$ si f es continua en el intervalo abierto (a, b), y por la derecha en a.
- La función f es **continua en el intervalo** $\boldsymbol{(a, b]}$ si f es continua en el intervalo abierto (a, b), y por la izquierda en b.
- La función f es **continua en el intervalo cerrado** $\boldsymbol{[a, b]}$ si f es continua en el intervalo abierto (a, b), a la derecha en a y a la izquierda en b.

Observación

- Las funciones polinomiales y las funciones seno y coseno son continuas en el intervalo abierto $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$; es decir, son continuas en todo su dominio.

- La función parte entera $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es continua en todos los intervalos de la forma $[n, n+1)$, donde n es un entero.

Ejemplo 1.5.6

Probar que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en su dominio; es decir, es continua en el intervalo $[0, +\infty)$.

Solución

Debemos probar que f es continua en todo punto a del intervalo abierto $(0, +\infty)$, y que también lo es por la derecha en $a = 0$. Bien, si $a > 0$, por la ley de la raíz:

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to a} x} = \sqrt{a}$$

Quiere decir que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en a. Por otro lado, si $a = 0$, entonces:

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to 0^+} x} = \sqrt{0} = 0$$

Quiere decir que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua por la derecha en 0.

CONTINUIDAD Y OPERACIONES CON FUNCIONES

Las leyes de los límites enunciadas en el teorema 1.2.2 nos dicen que el proceso de tomar límites se rige por las operaciones algebraicas. Esta propiedad se traslada a la continuidad, y se obtiene que ésta también respeta las operaciones algebraicas. Esto nos permite construir otras funciones continuas complicadas a partir de funciones simples.

Teorema 1.5.1

Sea $\boldsymbol{c}$ una constante, y sean $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ dos funciones continuas en el punto $\boldsymbol{a}$, entonces las siguientes funciones son continuas en $\boldsymbol{a}$:

1. $f \pm g$ **2.** cf **3.** fg **4.** $\dfrac{f}{g}$, si $g(a) \neq 0$

Demostración

Estos resultados son consecuencia inmediata de las leyes de los límites correspondientes. Así, por ejemplo, (1) es consecuencia de la *ley de la suma.*

En efecto, por ser f y g continuas en a, se tiene que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Luego:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \pm \left[\lim_{x\to a} g(x)\right] = f(a) \pm g(a)$$

Esto nos dice que $f \pm g$ es continua en a.

Ejemplo 1.5.7

Probar que las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

Solución

Por la primera observación de esta sección, ya sabemos que el seno y el coseno tienen la propiedad indicada. Veamos las otras.

Dado que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es el cociente de dos funciones continuas, entonces, por la parte 4 del teorema 1.5.1, la función $y = \tan x$ también es continua en todos los puntos x tales que $\cos x \neq 0$, que son precisamente los puntos del dominio de $y = \tan x$. De forma similar se puede demostrar la continuidad de las funciones *cotangente*, *secante* y *cosecante*.

El siguiente resultado es consecuencia de la ley de la raíz, y su demostración es similar a la dada en el ejemplo 1.5.6.

Teorema 1.5.2

1. Si n es **par**, entonces la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en el intervalo $[0, +\infty)$; es decir que es continua en todo su dominio.

2. Si n es **impar**, entonces la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en $\mathbb{R}$; es decir que es continua en todo su dominio.

CATALOGO DE FUNCIONES CONTINUAS

En el capítulo anterior vimos que para definir a^x, con x irracional, fue útil la idea de conseguir que la *función exponencial* $f(x) = a^x$ sea continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$. Por tal razón, debemos incluir la función exponencial a nuestra lista de funciones continuas. Por otro lado, también afirmamos que:

La función inversa de una función continua es continua

Esta afirmación se puede justificar intuitivamente observando que la gráfica de una función continua f no tiene saltos ni interrupciones, y que la gráfica de su inversa f^{-1} se obtiene reflejando f en la recta diagonal $y = x$, por lo cual la gráfica de f^{-1} tampoco presentará saltos o interrupciones. Esto nos dice que f^{-1} es continua. Este resultado es muy importante, por eso lo presentamos en el siguiente teorema, cuya demostración formal será omitida.

Teorema 1.5.3

Sea f una función definida en un intervalo I, donde f es inyectiva. Si f es continua en I, entonces la función inversa f^{-1} es continua en el rango de (f).

El resultado anterior nos permite concluir que la función $y = \log_a x$ es continua por ser inversa de la función exponencial, $y = a^x$.

En forma análoga, concluimos que las funciones trigonométricas inversas son continuas; de hecho, todas las siguientes funciones son continuas:

- Polinomios
- Funciones racionales
- Funciones radicales
- Funciones trigonométricas
- Funciones trigonométricas inversas
- Funciones exponenciales
- Funciones logarítmicas
- Función valor absoluto

El siguiente teorema es consecuencia directa del *teorema de cambio de variable* (teorema. 1.3.3) o teorema del límite de una composición de funciones. La demostración la presentamos en el problema resuelto 1.5.4.

Teorema 1.5.4 **Teorema de Sustitución.**

Si $\lim\limits_{t\to b} g(t) = L$ y f es continua en L, entonces:

$$\boxed{\lim_{t\to b} f\left(g(t)\right) = f(L) = f\left(\lim_{t\to b} g(t)\right)}$$

Demostración

Ver problema resuelto 1.5.4

Ejemplo 1.5.8 **a.** Si $\lim\limits_{t\to b} g(t) = L$, probar que: $\lim\limits_{t\to b} \mathrm{e}^{g(t)} = \mathrm{e}^{L}$

b. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}$ **c.** Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}\right)$

Solución

a. Sigue inmediatamente del teorema anterior, tomando en cuenta que la función exponencial $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ es continua.

b. Tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{x}+1)(\mathrm{e}^{x}-1)}{\mathrm{e}^{x}-1} = \lim_{x\to 0} (\mathrm{e}^{x}+1)$$
$$= \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x}+1 = \mathrm{e}^{0}+1 = 1+1 = 2$$

c. Tomando en cuenta que la función logarítmica $f(x) = \ln x$ es continua, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}\right) = \ln(2) = \ln 2$$

Una consecuencia del teorema anterior, que es inmediata y de suma importancia, es el siguiente resultado que dice que la continuidad también respeta la operación de composición de funciones.

Teorema 1.5.5

Si $\boldsymbol{g}$ es continua en $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{g(b)}$, entonces la función compuesta $\boldsymbol{f \circ g}$ es continua en $\boldsymbol{b}$.

Demostración

Por ser g continua en b, se tiene que $\lim\limits_{t\to b} g(t) = g(b)$

Ahora, teniendo en cuenta el teorema anterior, tenemos:

$$\lim_{t\to b} f\,(g(t)) = f\left(\lim_{t\to b} g(t)\right) = f\,((g(b)) = (f\circ g)(b)$$

Esto nos dice que $f \circ g$ es continua en b.

Ejemplo 1.5.9 Probar que la función $h(x) = \mid \ln x \mid$ es continua en $(0, +\infty)$.

Solución

Si $g(x) = \ln x$ y $f(x) =\mid x \mid$, tenemos que $h = f \circ g$. En efecto:

$$(f \circ g)(x) = f\,(g(x)) = f(\ln x) =\mid \ln x \mid= h(x)$$

La función $g(x) = \ln x$ es una función continua en $(0, +\infty)$, y la función valor absoluto $f(x) =\mid x \mid$ es continua en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, por el teorema anterior, $h = f \circ g$ también es continua en $(0, +\infty)$.

Teorema 1.5.6 **Teorema del Valor Intermedio.**

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y si K es un número que está estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir:

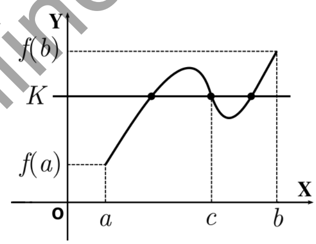
$$f(a) < K < f(b) \quad \text{o} \quad f(b) < K < f(a),$$

entonces **existe un número c en $(a,\ b)$** tal que $\boldsymbol{f(c) = K}$.

Gráficamente, este teorema nos dice que cualquier recta horizontal $y = K$ que esté comprendida entre las rectas horizontales:

$$y = f(a) \qquad \text{e} \qquad y = f(b)$$

debe cortar al gráfico de f en, por lo menos, un punto $(c,\ f(c))$, donde $a < c < b$.



Demostraremos la utilidad de este teorema hallando las raíces de una ecuación en el ejemplo 1.5.10.

Ejemplo 1.5.10 Dada la ecuación $x^3 + 3x - 5 = 0$

a. probar que esta ecuación tiene una raíz entre 1 y 2.

b. hallar una aproximación de esta raíz con un error menor que 0.1.

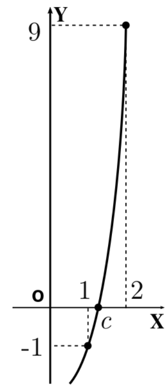
Solución

a. La función $f(x) = x^3 + 3x - 5$, por ser un polinomio, es continua en todo $\mathbb{R}$; además, es continua en el intervalo cerrado $[1,\ 2]$.

Por otro lado, tenemos que:

$$f(1) = (1)^3 + 3(1) - 5 = -1 \quad \text{y} \quad f(2) = (2)^3 + 3(2) - 5 = 9$$

Vemos que $f(1)$ es negativo y $f(2)$ positivo.



Luego, $f(1) < 0 < f(2)$. Entonces, de acuerdo al teorema del valor intermedio, con $K = 0$, existe un c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Esto es:

$$\exists\, c \text{ tal que } 1 < c < 2 \;\text{ y } c^3 + 3c - 5 = 0.$$

Quiere decir que c es una raíz de la ecuación dada.

b. Podemos escoger 1 o 2 como una primera aproximación a la raíz. Nos conviene escoger 1, ya que $f(1) = -1$ está más cerca de 0 que $f(2) = 9$. Esta escogencia tiene un error menor que 1; es decir, $\mid 1 - c \mid < 1$.

Para obtener una mejor aproximación emplearemos nuevamente el teorema del valor intermedio, de la siguiente manera:

- Subdividimos el intervalo [1, 2] en 10 intervalos:

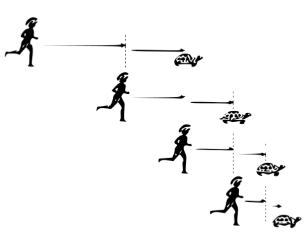
$$[1,\ 1.1],\ [1.1,\ 1.2],\ [1.2,\ 1.3], \ldots, [1.9,\ 2].$$

- Evaluamos f en los extremos de estos intervalos, y tomamos uno que arroje signos opuestos en los extremos. En nuestro caso, este intervalo es [1.1, 1.2], ya que $f(1.1) = -0.369$ y $f(1.2) = 0.328$. Esto significa que $1.1 < c < 1.2$.
- Ahora podemos escoger a 1.1 o a 1.2 como una segunda aproximación a c, para lo cual escogemos 1.1, ya que esta aproximación tiene un error menor que 0.1.

Si se quiere mejorar la aproximación solo se debe repetir el proceso.

¡Sabías esto?

Zenón de Elea *fue un filósofo del siglo* IV *A.C. bien conocido por sus paradojas. Algunas de ellas fueron motivo de debate por varios siglos, como su paradoja de* ***Aquiles y la tortuga****, que cuestiona la continuidad(e infinidad) del espacio y el tiempo.*



Aquiles compitiendo en una carrera con una tortuga, a la que se ha dado una ventaja inicial, por muy velozmente que corra, nunca podrá alcanzar ni adelantar a la tortuga, por muy lento que ésta se mueva, pues cuando Aquiles haya alcanzado la posición inicial de la tortuga, ésta habrá avanzado alguna pequeña distancia, y cuando Aquiles haya recorrido esta distancia, la tortuga habrá avanzado algo más lejos. Así, el proceso continúa de forma indefinida, con el resultado de que el veloz Aquiles no puede alcanzar a la lenta tortuga.

PROBLEMAS RESUELTOS 1.5

Problema 1.5.1

Hallar k sabiendo que la siguiente función es continua en -2:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \leq -2 \\ kx^2 - 2x, & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Solución

La función f debe ser continua por la derecha y por la izquierda en -2, pero f es continua por la izquierda en -2 si y solo si:

$$f(-2)) = \lim_{x \to -2^-} x^3 = (-2)^3 = -8$$

Ahora, f es continua por la derecha en -2 si y solo si:

$$f(-2) = \lim_{x \to -2^+} kx^2 - 2x = k(-2)^2 - 2(-2) = 4k + 4$$

Luego, se debe cumplir que:

$$4k + 4 = -8 \Rightarrow 4k = -12 \Rightarrow k = -3$$

Problema 1.5.2 Probar que:

$$f \text{ es continua en } a \ \Leftrightarrow (\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)\,(\mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon)$$

Solución

Por definición:

$$\begin{aligned} f \text{ es continua en } a &\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \\ &\Leftrightarrow (\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)\,(0 < \mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon) \qquad (1) \end{aligned}$$

(⇒) Se cumple (1) ya que f continua en a. además, f está definida en a.

En este contexto podemos eliminar el requerimiento $0 < \mid x - a \mid$, ya que para $x = a$ se cumple que $\mid f(a) - f(a) \mid = 0 < \epsilon$.

Eliminado este requerimiento, (1) se convierte en:

$$(\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)\,(\mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon) \qquad (2)$$

(⇐) Es obvio, ya que (2) $\Rightarrow$ (1).

Problema 1.5.3 Probar que:

Si f es continua en a, y $f(a) > 0$, entonces existe un intervalo abierto $(a-\delta,\, a+\delta)$ tal que:

$$f(x) > 0,\, \forall\, x \in (a-\delta,\, a+\delta)$$

Solución

Por ser f continua en a, existe un $\delta > 0$ para $\epsilon = \frac{1}{2}f(a)$, tal que:

$$\mid x - a \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon = \frac{1}{2}f(a)$$

$$\Rightarrow -\delta < x - a < \delta \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}f(a) < f(x) - f(a) < \frac{1}{2}f(a)$$

$$\Rightarrow a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow \frac{1}{2}f(a) < f(x) < \frac{3}{2}f(a)$$

Por lo tanto, por ser $\frac{1}{2}f(a) > 0$, tenemos:

$$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > 0$$

Problema 1.5.4 **Probar el Teorema de Sustitución** (teorema 1.5.4).

Si $\lim\limits_{t\to b} g(t) = L$ y f es continua en L, entonces:

$$\boxed{\lim_{t\to b} f\left(g(t)\right) = f(L) = f\left(\lim_{t\to b} g(t)\right)}$$

Solución

Debemos probar que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \mid t - b \mid < \delta \Rightarrow |f\left(g(t)\right) - f(L)| < \epsilon$$

Como f es continua en L para el $\epsilon > 0$ dado, existe un $\delta_1 > 0$ tal que:

$$\mid x - L \mid < \delta_1 \Rightarrow \mid f(x) - f(L) \mid < \epsilon \tag{1}$$

Por otro lado, como $\lim\limits_{t\to b} g(t) = L$ para $\epsilon_1 = \delta_1$, entonces existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \mid t - b \mid < \delta \Rightarrow \mid g(t) - L \mid < \epsilon_1 = \delta_1 \tag{2}$$

De (1) y (2), tomando $x = g(t)$, se tiene que:

$$0 < \mid t - b \mid < \delta \Rightarrow |f\left(g(t)\right) - f(L)| < \epsilon$$

Problema 1.5.5 Sea f una función con dominio $\mathbb{R}$ tal que:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}$$

Si f es continua en 0, probar que f es continua en todo punto $a \in \mathbb{R}$.

Solución

Debemos probar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Primeramente tenemos que $f(0) = 0$.

En efecto:

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Por otro lado, por ser f continua en 0, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Ahora bien, haciendo el cambio de variable $x = a + h$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} [f(a) + f(h)] \\ &= \lim_{h \to 0} f(a) + \lim_{h \to 0} f(h) = f(a) + \lim_{h \to 0} f(h) = f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

Problema 1.5.6 **Probar el Teorema del Punto Fijo.**

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[0,\ 1]$. Probar que:

$$0 \leq f(x) \leq 1, \forall\, x \in [0,\ 1] \Rightarrow f \text{ tiene un punto fijo}$$

Es decir: $\exists\, \boldsymbol{c} \in [0,\ 1]$ tal que $\boldsymbol{f(c) = c}$

Solución

Caso 1. $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$.

En este caso, tomamos $c = 0$ o $c = 1$, y la proposición se cumple.

Caso 2. $f(0) \neq 0$ y $f(1) \neq 1$.

Sea $g(x) = x - f(x)$. Por ser f continua en $[0,\ 1]$, g también lo es.

Además:

$$g(0) = 0 - f(0) = -f(0) < 0 \quad \text{y} \quad g(1) = 1 - f(1) > 0$$

Luego, por el teorema del valor intermedio, existe un c en $(0,\ 1)$ tal que:

$$g(c) = 0 \Rightarrow c - f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.5

1. Probar que la siguiente función es continua en 2:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

2. Sea $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. Definir $g(0)$ para que la función g sea continua en 0.

3. Probar que la siguiente función es discontinua en el punto 3, y que 3 es el único punto de discontinuidad:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{si } x < 3 \\ 4, & \text{si } x = 3 \\ -x + 8, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

En los problemas del 4 al 11, hallar los puntos de discontinuidad de las funciones dadas, indicando el tipo de discontinuidad.

4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **5.** $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **6.** $h(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

7. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-5}$ **8.** $g(x) = \dfrac{x+2}{(x-3)(x+8)}$ **9.** $h(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x-2}}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{|\, x-3 \,|}$ **11.** $g(x) = \dfrac{|\, x-1 \,|}{(x-1)^3}$

En los problemas del 12 al 15, graficar la función dada y localizar los puntos de discontinuidad mirando el gráfico.

12. $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < 3 \\ 1, & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 4, & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$ **13.** $g(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{si } x < -2 \\ 2x - 1, & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ -\frac{x}{2} + 2, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

14. $h(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 1, & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **15.** $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{x+1}, & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

En los problemas del 16 al 19, hallar los valores de *a* y *b* para que la función dada sea continua en su dominio.

16. $g(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < -1 \\ ax + b, & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

17. $h(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen}^2 x, & \text{si } x < \frac{\pi}{4} \\ ax + b, & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ \cos^2 x, & \text{si } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} -2\operatorname{sen} x, & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\operatorname{sen} x + b, & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

19. $g(x) = \begin{cases} a - x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ b, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

En los problemas del 20 al 25, hallar el conjunto de puntos donde la función dada es discontinua.

20. $f(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$

21. $g(x) = \lfloor \frac{x}{4} \rfloor$

22. $h(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$

23. $g(x) = \lfloor \sqrt{1 - x^2} \rfloor$

24. $g(x) = 1 - x + \lfloor x \rfloor - \lfloor 1 - x \rfloor$

$$\textit{Sugerencia: } g(x) = \begin{cases} 1 - x + 2n, & \text{si } n < x < n + 1 \\ n, & \text{si } x = n \end{cases}$$

25. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

Sugerencia: En todo intervalo abierto siempre existe un racional y un irracional.

En los problemas del 26 al 28, probar que la ecuación dada tiene una raíz en el intervalo indicado. Aproximar la raíz con un error menor que 0.1.

26. $x^3 + 1 = 3x$, en [1, 2]

27. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 = 0$, en [-2, -1]

28. $\cos x = x$, en [0, 1]

29. Sea f una función tal que $f(x + y) = f(x)f(y)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$.

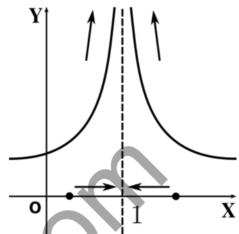
Si f es continua en 0, probar que f es continua en todo punto $a \in \mathbb{R}$.

SECCION 1.6

LIMITES INFINITOS Y ASÍNTOTAS VERTICALES

Consideremos la siguiente función y su gráfico correspondiente:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$



Buscamos analizar el comportamiento de esta función cuando x se aproxima a 1 por la izquierda y por la derecha. La siguiente tabla muestra los valores de $f(x)$ para algunos valores de x cercanos a 1:

x	0.8	0.9	0.99	0.999	$\rightarrow \mathbf{1} \leftarrow$	1,001	1,01	1.1	1.2
$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$	25	100	10,000	1,000,000	$\rightarrow +\infty \leftarrow$	1,000,000	10,000	100	25

Es evidente que en la medida que x se aproxima a 1, por ambos lados, el valor de $f(x)$ crece ilimitadamente. Quiere decir que, en algún momento, $f(x)$ es mayor que cualquier número positivo tomado de antemano. Este hecho lo expresamos diciendo que el límite de $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, cuando x tiende a 1, es $+\infty$ (infinito positivo), y se representa así:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Ahora consideremos la función:

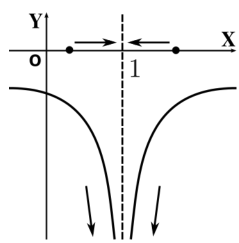
$$f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

La tabla correspondiente es la siguiente:

x	0.8	0.9	0.99	0.999	$\rightarrow \mathbf{1} \leftarrow$	1,001	1,01	1.1	1.2
$f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$	-25	-100	-10,000	-1,000,000	$\rightarrow -\infty \leftarrow$	-1,000,000	-10,000	-100	-25

Ahora podemos observar que a medida que x se aproxima a 1, por ambos lados, el valor de $f(x)$ decrece ilimitadamente.

En otros términos, en algún momento, $f(x)$ es menor que cualquier número negativo tomado de antemano. Este hecho lo expresamos diciendo que el límite de $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$, cuando x tiende a 1, es $-\infty$ (infinito negativo), y se representa así:



$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

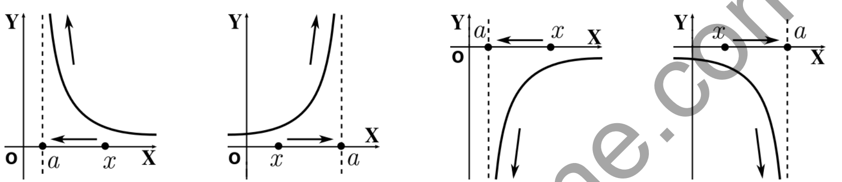
En resumen, tenemos las dos siguientes definiciones informales, donde asumimos que la función f está definida en un intervalo abierto que contiene al punto $\boldsymbol{a}$, excepto posiblemente en el mismo $\boldsymbol{a}$.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow f(x)$ **crece ilimitadamente** cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow f(x)$ **decrece ilimitadamente** cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$.

Similarmente, se definen los siguientes límites unilaterales:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



Es evidente que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo 1.6.1

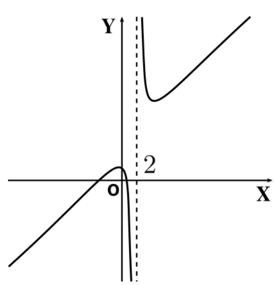
Hallar los límites unilaterales en los puntos de discontinuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$$

Solución

Esta función racional tiene un único punto de discontinuidad, que es 2, y nos piden hallar dos límites unilaterales:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x)$$



Analicemos los signos del numerador y del denominador para puntos x cercanos a 2. Con respecto al numerador tenemos que:

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 3) = 2^2 + 2(2) - 3 = 5$$

Dado que este límite es 5 para los puntos x cercanos a 2, ya sea por la derecha o por la izquierda, el valor del numerador se mantiene cerca de 5; por lo tanto, éste valor tiene signo positivo.

Ahora, si x tiende a 2 por la derecha, entonces $x-2$ es positivo. Además, como el numerador es positivo, el signo del cociente $\frac{x^2+2x-3}{x-2}$ también es positivo. Adicionalmente, como $x-2$ tiende a 0 cuando x tiende a 2 por la derecha, tenemos que:

$$\lim_{x\to 2^+} = \frac{x^2+2x-3}{x-2} = +\infty$$

Por otro lado, si x tiende a 2 por la izquierda, $x-2$ es negativo y dado que el numerador es positivo, el cociente $\frac{x^2+2x-3}{x-2}$ también es negativo. Además, como $x-2$ tiende a 0 cuando x tiende a 2 por la izquierda, tenemos que:

$$\lim_{x\to 2^-} = \frac{x^2+2x-3}{x-2} = -\infty$$

ASÍNTOTAS VERTICALES

En el ejemplo anterior, la recta vertical $L : x = 2$ tiene una característica muy especial con respecto al gráfico de la función, y es que la distancia de un punto $P = (x, f(x))$ del gráfico, a la recta L, tiende a 0 a medida que x tiende a 2. Por esta razón se dice que la recta $x = 2$ es una *asíntota* (vertical) de la gráfica de la función f. En general, tenemos la siguiente definición.

Definición

Diremos que **la recta $x = a$** es una **asíntota vertical** del gráfico de la función f si se cumple al menos una de los cuatro límites a continuación:

1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ **4.** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Ejemplo 1.6.2 La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la función:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$$

En efecto, ya vimos en el ejemplo 1.6.1 que:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x-3}{x-2} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x-3}{x-2} = -\infty$$

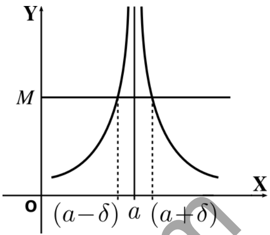
Definición **Rigurosa de Límite Infinito.**

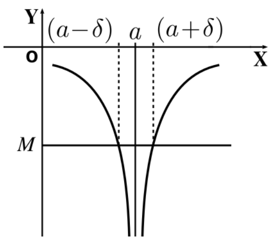
Sea $\boldsymbol{f}$ una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto $\boldsymbol{a}$, excepto posiblemente en $\boldsymbol{a}$.

1. $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

$\Leftrightarrow$ Para cualquier $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <| x - a |< \delta \Rightarrow f(x) > M$$





2. $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

$\Leftrightarrow$ Para cualquier $M < 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <| x - a |< \delta \Rightarrow f(x) < M$$

Las definiciones rigurosas de los límites unilaterales infinitos serán presentadas en el problema resuelto 1.6.4.

El siguiente teorema proporciona resultados rápidos para el cálculo de límites infinitos. Las expresiones entre paréntesis son reglas nemotécnicas.

Teorema 1.6.1 Supongamos que $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\displaystyle \lim_{x \to a} g(x) = 0$

1. $L > 0$ y $g(x) \to 0$ positivamente $\Rightarrow$ $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \ \left(\frac{+}{0^+} = +\infty \right)$

2. $L > 0$ y $g(x) \to 0$ negativamente $\Rightarrow$ $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \ \left(\frac{+}{0^-} = -\infty \right)$

3. $L < 0$ y $g(x) \to 0$ positivamente $\Rightarrow$ $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \ \left(\frac{-}{0^+} = -\infty \right)$

4. $L < 0$ y $g(x) \to 0$ negativamente $\Rightarrow$ $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \ \left(\frac{-}{0^-} = +\infty \right)$

El teorema también es válido si se cambia $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.

Demostración

Haremos una demostración informal empleando la misma estrategia del ejemplo 1.6.1. Sólo probaremos 1, ya que la prueba de los otros casos es análoga, y se deja como ejercicio al lector. La prueba rigurosa será presentada en el problema resuelto 1.6.3.

1. Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $L > 0$, entonces $f(x) > 0$ para los x próximos a a.

Por otro lado, como $g(x) \to 0$ positivamente; para los x próximos a a, tenemos que $g(x) > 0$, y $g(x)$ es cercano a 0. Luego, cuando x tiende a a, el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ es positivo y crece ilimitadamente. Esto es:

$$\lim_{x\to a} = \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

El siguiente teorema es un caso particular notable del teorema anterior.

Teorema 1.6.2 Si $\boldsymbol{n}$ es entero positivo, entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Los resultados establecidos en el siguiente teorema son intuitivamente evidentes. Haremos una demostración parcial en el problema resuelto 1.6.5.

Teorema 1.6.3 Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty$ $\qquad (\pm\infty \pm L = \pm\infty)$

2. $L > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \pm\infty$ $\qquad ((\pm\infty)(+) = \pm\infty)$

$L < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \mp\infty$ $\qquad ((\pm\infty)(-) = \mp\infty)$

3. $L > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \pm\infty$ $\qquad \left(\dfrac{\pm\infty}{+} = \pm\infty\right)$

$L < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \mp\infty$ $\qquad \left(\dfrac{\pm\infty}{-} = \mp\infty\right)$

4. $L \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right] = 0$ $\qquad \left(\dfrac{L}{\pm\infty} = 0\right)$

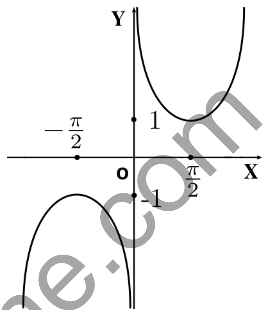
Ejemplo 1.6.3 Probar que:

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{cosec} x = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{cosec} x = -\infty$

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$ **d.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \cot x = -\infty$

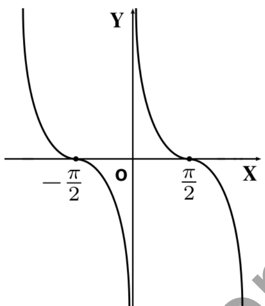
Luego, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de ambas funciones.

Solución



a. $$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cosec} x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

b. $$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{cosec} x = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$



c. $$\lim_{x\to 0^+} \cot x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

d. $$\lim_{x\to 0^-} \cot x = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

Argumentos similares prueban que las rectas $x = n\pi$, donde n es cualquier entero, son asíntotas verticales de $y = \cot x$ y de $y = \operatorname{cosec} x$.

OTRAS FORMAS INDETERMINADAS

Presentamos otras dos formas indeterminadas: $\frac{\infty}{\infty}$ y $\infty - \infty$. En esta parte nos limitaremos a casos simples de estas formas, ya que más adelante veremos una técnica conocida con el nombre de *Regla de L'Hôpital* que nos permitirá resolver casos más complejos de estas y otras formas indeterminadas.

Forma Indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$

Un límite de un cociente tiene la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ si el límite (o límite lateral) del numerador y del denominador es $\pm\infty$.

Ejemplo 1.6.4 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x}$

Solución

De acuerdo al ejemplo anterior, tenemos que:

$$\frac{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \cot x}{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cosec} x} = \frac{+\infty}{+\infty} \qquad (?)$$

Ahora procedemos a resolver la indeterminación:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1\end{aligned}$$

Forma Indeterminada $\infty - \infty$

Esta forma indeterminada se presenta cuando aplicamos la *ley de la suma* en el límite de una suma o diferencia, y obtenemos una expresión $\infty - \infty$, o la expresión $-\infty + \infty$. En este caso, la indeterminación se puede salvar transformando la suma o diferencia en un cociente.

Ejemplo 1.6.5 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)$

Solución

Tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} - \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty - \infty \qquad (?)$$

Ahora procedemos a resolver la indeterminación:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1-x}{x^3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty\end{aligned}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.6

Problema 1.6.1 Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

Solución

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{0^+}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = (+\infty)(1) = +\infty$$

Problema 1.6.2 Hallar $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$

Solución

Este límite es una forma indeterminada de la forma $\frac{0}{0}$. Procedemos a resolver la indeterminación. Se tiene que:

$$x \to 3^- \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow 3-x > 0$$

Ahora,

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} = \frac{\sqrt{(3-x)(3+x)}}{-(3-x)} = \frac{\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}}$$

Si $f(x) = \sqrt{3+x}$ y $g(x) = -\sqrt{3-x}$, se tiene que:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3+x} = \sqrt{6} > 0,$$

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \left(-\sqrt{3-x}\right) = 0 \quad \text{y} \quad g(x) = -\sqrt{3-x} < 0$$

Luego, $g(x) \to 0$ negativamente.

Aplicando la parte 2 del teorema 1.6.3, se tiene que:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}} = -\infty \qquad \left(\frac{+}{0^-} = -\infty\right)$$

El resultado anterior nos dice que la recta $x = 3$ no solo es asíntota vertical, sino que es única, ya que 3 es el único punto que vuelve 0 al denominador.

Problema 1.6.3 Probar el teorema 1.6.3

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

1. $L > 0$ y $g(x) \to 0$ positivamente $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \left(\dfrac{+}{0^+} = +\infty\right)$

2. $L > 0$ y $g(x) \to 0$ negativamente $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \left(\dfrac{+}{0^-} = -\infty\right)$

3. $L < 0$ y $g(x) \to 0$ positivamente $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \left(\dfrac{-}{0^+} = -\infty\right)$

4. $L < 0$ y $g(x) \to 0$ negativamente $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \left(\dfrac{-}{0^-} = +\infty\right)$

Solución

Sólo probaremos 1 y 4, ya que para los casos 2 y 3 se procede en forma análoga, y los dejamos como ejercicio para el lector.

1. Debemos probar que, dado $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0$ y $\frac{L}{2} < L < \frac{3L}{2}$, por el problema resuelto 1.3.10, con $A = \frac{L}{2}$ y $B = \frac{3L}{2}$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta_1 \Rightarrow \frac{3L}{2} > f(x) > \frac{L}{2} \tag{1}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, dado $\epsilon = \frac{L}{2M}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta_2 \Rightarrow\mid g(x) \mid< \epsilon = \frac{L}{2M}$$

Como $g(x) \to 0$ positivamente, la expresión anterior la escribimos así:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta_2 \Rightarrow g(x) < \frac{L}{2M} \tag{2}$$

Ahora, si $\delta =$ Mínimo$\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces obtenemos de (1) y (2):

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2M}} = M$$

4. Debemos probar que, dado $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M$$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L < 0$ y $\frac{3L}{2} < L < \frac{L}{2}$, por el problema resuelto 1.3.10, con $A = \frac{3L}{2}$ y $B = \frac{L}{2}$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta_1 \Rightarrow \frac{3L}{2} < f(x) < \frac{L}{2} \Rightarrow -f(x) > -\frac{L}{2} \tag{3}$$

Como $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, dado $\epsilon = -\frac{L}{2M}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta_2 \Rightarrow \mid g(x) \mid< \epsilon = -\frac{L}{2M}$$

Como $g(x) \to 0$ negativamente, $\mid g(x) \mid= -g(x)$ y a la expresión anterior:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta_2 \Rightarrow -g(x) < -\frac{L}{2M} \tag{4}$$

Ahora, si $\delta =$ Mínimo$\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces obtenemos de (3) y (4):

$$0 <\mid x-a \mid< \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} > \frac{-\frac{L}{2}}{-\frac{L}{2M}} = M$$

Problema 1.6.4 Definir rigurosamente:

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ **2.** $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

3. $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ **4.** $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Solución

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \Rightarrow (\forall\, M > 0)(\exists\, \delta > 0)\,(0 < x-a < \delta \Rightarrow f(x) > M)$

2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \Rightarrow (\forall\, M < 0)(\exists\, \delta > 0)\,(0 < x-a < \delta \Rightarrow f(x) < M)$

3. $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \Rightarrow (\forall\, M > 0)(\exists\, \delta > 0)\,(0 < a-x < \delta \Rightarrow f(x) > M)$

4. $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \Rightarrow (\forall\, M < 0)(\exists\, \delta > 0)\,(0 < a-x < \delta \Rightarrow f(x) < M)$

Problema 1.6.5 Probar que:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, entonces:

a. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = +\infty$ **b.** $L < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$

Solución

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, por el problema resuelto 1.3.10, para $A = L - \frac{1}{2} \mid L \mid$ y $B = L + \frac{1}{2} \mid L \mid$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta_1 \Rightarrow L - \frac{1}{2} \mid L \mid< g(x) < L + \frac{1}{2} \mid L \mid \qquad (1)$$

a. Debemos probar que, dado $M > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > M$$

Solo nos interesan los valores grandes de M, así que asumimos que $M > L$.

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, dado $M' = M - (L - \frac{1}{2} \mid L \mid)$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta_2 \Rightarrow f(x) > M' = M - (L - \frac{1}{2} \mid L \mid) \qquad (2)$$

Ahora, tomando $\delta =$ Mínimo$\{\delta_1, \delta_2\}$, de (1) y (2) se tiene:

$$\begin{aligned} 0 <\mid x-a \mid< \delta \Rightarrow f(x) + g(x) &> M' + L - \frac{1}{2} \mid L \mid \\ &= M - (L - \frac{1}{2} \mid L \mid) + L - \frac{1}{2} \mid L \mid = M \end{aligned}$$

b. Debemos probar que, dado $M < 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta \Rightarrow f(x)g(x) < M$$

Como $L < 0$, entonces $\mid L \mid = -L$, y (1) se escribe así:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta_1 \Rightarrow \frac{3}{2}L < g(x) < \frac{1}{2}L \qquad (3)$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, dado $M' = \frac{2M}{L}$, existe $\delta_3 > 0$ tal que:

$$0 <\mid x-a \mid< \delta_3 \Rightarrow f(x) > \frac{2M}{L} \qquad (4)$$

Tomando $\delta =$ Mínimo$\{\delta_1,\, \delta_3\}$; de (3) y (4), y considerando que:

$$f(x) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}L < 0,$$

se tiene:

$$0 <\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow f(x)g(x) < f(x)\frac{1}{2}L < \left[\frac{2M}{L}\right]\frac{1}{2}L = M$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.6

En los problemas del 1 al 9, calcular el límite por la derecha y el límite por la izquierda en cada punto de discontinuidad de las funciones indicadas.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ **2.** $g(x) = \dfrac{1}{\mid x-2 \mid}$ **3.** $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$ **5.** $g(x) = \dfrac{x+1}{x-5}$ **6.** $h(x) = \dfrac{1}{x(x+2)}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-2x+3}$ **8.** $g(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ **9.** $h(x) = x - \dfrac{1}{x}$

En los problemas del 10 al 28, calcular el límite indicado.

10. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ **11.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ **12.** $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \sec x$

13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \sec x$

14. $\lim\limits_{x\to \frac{-3\pi}{2}^+} \sec x$

15. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x-1}{1-\sqrt{2x-x^2}}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}-2}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

18. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\dfrac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right]$

19. $\lim\limits_{x\to 2^+} \left[\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2}\right]$

20. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\lfloor x^2 \rfloor - 1}{x^2-1}$

21. $\lim\limits_{y\to 1} \left(\dfrac{1}{y-1} - \dfrac{3}{y^3-1}\right)$

22. $\lim\limits_{y\to 0} \left(\dfrac{1}{y\sqrt{y+1}} - \dfrac{1}{y}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|\, x \,|}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$

26. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos^2 x}{x}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left(\dfrac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1-\cos x}{\tan^3 x - \operatorname{sen}^3 x}\right)$

En los problemas del 29 al 32, hallar las asíntotas verticales a la gráfica de la función dada.

29. $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

30. $y = \dfrac{x}{4x^2-1}$

31. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

32. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

33. Demostrar que las rectas $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, donde n es un entero, son asíntotas verticales de la gráfica de $y = \tan x$.

SECCION 1.7

LIMITES EN EL INFINITO Y ASÍNTOTAS HORIZONTALES

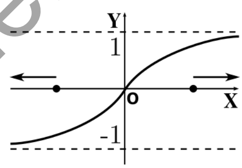
Observe detenidamente el comportamiento de la siguiente función cuando la variable x se aleja del origen (de 0) ilimitadamente, hacia la derecha o hacia la izquierda. En el primer caso diremos que x tiende a $+\infty$, y en el segundo, que x tiende a $-\infty$.

$$f(x)=\frac{x}{\mid x\mid+1}=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}, & \text{si } x\geq 0\\ \dfrac{x}{-x+1}, & \text{si } x<0\end{cases}$$

Ahora veamos las dos tablas a continuación, una para los valores crecientes de x, y otra para los valores decrecientes (negativas).

$x\geq 0$	100	1,000	$10,000$	$\rightarrow$	$+\infty$
$f(x)=\dfrac{x}{(x+1)}$	0.9901	0.9990	0.9999	$\rightarrow$	1

$x<0$	-100	-1,000	$-10,000$	$\rightarrow$	$-\infty$
$f(x)=\dfrac{x}{(-x+1)}$	-0.9901	-0.9990	-0.9999	$\rightarrow$	-1



En la primera tabla se puede apreciar que $f(x)$ se aproxima a 1 cuando x crece ilimitadamente. En este caso diremos que el límite de $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$, cuando x tiende a $+\infty$, es 1, y lo representamos así:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mid x\mid+1}=1$$

En la segunda tabla observamos que $f(x)$ se aproxima a -1 cuando x decrece ilimitadamente. En este caso diremos que el límite de $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$, cuando x tiende a $-\infty$, es -1, y lo representamos así:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\mid x\mid+1}=-1$$

En general, tenemos las siguientes definiciones informales:

1. Sea f una función definida en un intervalo de la forma $(a,\,+\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L \quad\Leftrightarrow$$ **$f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L cuando x crece ilimitadamente.**

2. Sea f una función definida en un intervalo de la forma $(-\infty,\,a)$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=L \quad\Leftrightarrow$$ **$f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L cuando x decrece ilimitadamente.**

Ahora que ya hemos estudiado los límites en el infinito, desde el punto de vista intuitivo, estamos listos para explorar su definición rigurosa.

Definición **Rigurosa de límites en el infinito.**

1. Sea f una función definida en un intervalo de la forma $(a, +\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\,\epsilon > 0)(\exists\, N > 0)\,(x > N \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon)$$

2. Sea f una función definida en un intervalo de la forma $(-\infty, a)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\,\epsilon > 0)(\exists\, N < 0)\,(x < N \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \epsilon)$$

Las leyes de los límites del teorema 1.2.2, y las propiedades de los límites enunciadas en los teoremas 1.6.1 y 1.5.3 también se cumplen para los límites en el infinito, cuando $x \to \pm\infty$.

Teorema 1.7.1

$$\textbf{1.}\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \textbf{2.}\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

Demostración

Ver el problema resuelto 1.7.4.

Observe que el teorema anterior puede verse como el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$, para el cual se cumple que:

$$x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0^+ \qquad \text{y} \qquad x \to -\infty \Leftrightarrow t \to 0^-$$

No podemos invocar directamente al teorema de cambio de variable (teorema 1.3.3) para de este respecto, ya que éste sólo fue probado para el caso $x \to a$ (con a finito).

Ejemplo 1.7.1 Hallar los siguientes limites:

$$\textbf{1.}\ \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \qquad\qquad \textbf{2.}\ \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

Solución

Aplicando el teorema anterior en ambos casos, y haciendo $x = \frac{1}{t}$:

$$\textbf{1.}\ \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\operatorname{sen} t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

$$\textbf{2.}\ \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\operatorname{sen} t = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t^{\frac{t}{2}}}\right]\left[\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]$$

$$= \left[\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}}\right]\left[\lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right] = (+\infty)(1) = +\infty$$

Teorema 1.7.2 Si n es un número entero positivo, entonces:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ **4.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Demostración

Ver el problema resuelto 1.7.6.

Con este teorema deducimos fácilmente los límites en el infinito positivo y negativo ($\pm\infty$) de un polinomio.

COROLARIO Sea $\boldsymbol{n > 0}$. Se tiene:

a. $$\lim_{x \to +\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

b. Si $\boldsymbol{n}$ es par, entonces:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

c. Si $\boldsymbol{n}$ es impar, entonces:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \begin{cases} -\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ +\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Demostración

Sólo probamos la parte **(a)**, ya que el proceso es el mismo para los otros casos.

a. $$\lim_{x \to +\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x^n) \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$= (+\infty)(a_n + 0 + \ldots + 0 + 0) = (+\infty)(a_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.7.2 Dado el polinomio $p(x) = -4x^3 + 8x^2 - 12x - 4$, hallar:

$$\textbf{a.} \lim_{x\to+\infty} p(x) \qquad \textbf{b.} \lim_{x\to-\infty} p(x)$$

Solución

El término de mayor potencia es $-4x^3$, donde su coeficiente es -4, que es menor que cero $(-4 < 0)$. Luego:

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-4x^3 + 8x^2 - 12x - 4\right) = -\infty$

b. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(-4x^3 + 8x^2 - 12x - 4\right) = +\infty$

Ejemplo 1.7.3 Calcular:

$$\textbf{a.} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} \qquad \textbf{b.} \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2+1}$$

Solución

Ambos límites son indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Resolveremos la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador por la mayor potencia de x, que es es x^2.

a.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3}{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{1+\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{1+0} = 3$$

b.
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\frac{(x^2+1)}{x^2}} = \frac{3}{1+\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{1+0} = 3$$

Ejemplo 1.7.4 Calcular:

$$\textbf{a.} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \textbf{b.} \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solución

Ambos límites son indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Resolveremos la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador entre x.

a. Si $x > 0$, entonces $x = \sqrt{x^2}$. Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1\end{aligned}$$

b. Si $x < 0$, entonces $x = -\sqrt{x^2}$. Luego:

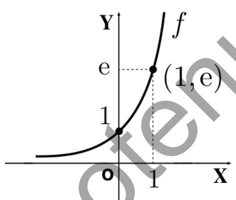
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \\ &= -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} = -\sqrt{\frac{1}{1+0}} = -1\end{aligned}$$

Teorema 1.7.3

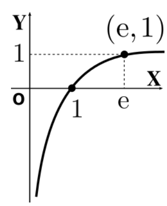
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ **4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Demostración



$\boldsymbol{y = \mathrm{e}^x}$



$\boldsymbol{y = \ln x}$

Basta con observar el gráfico de la función exponencial $y = \mathrm{e}^x$ para intuir los resultados 1 y 2, por lo que omitiremos su demostración formal; sin embargo, las pruebas 3 y 4 sí serán presentadas en el problema resuelto 1.7.7.

Observe que el límite 3 nos indica que el eje Y es una asíntota vertical de la función *logaritmo natural.*

Ejemplo 1.7.5 Calcular los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ **c.** $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1-2\ln x}{1+3\ln x}$

Solución

a. $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$

b. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x} - \frac{e^{-x}}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{e^{-x}}{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}$

$$= \frac{1 - \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{2x}}\right)}{1 + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

c. $\displaystyle \lim_{x\to0^+} \frac{1-2\ln x}{1+3\ln x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\ln x} - 2}{\frac{1}{\ln x} + 3} = \frac{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\ln x} - 2}{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\ln x} + 3} = \frac{0-2}{0+3} = -\frac{2}{3}$

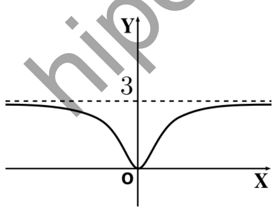
ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Definición

Diremos que **la recta $\boldsymbol{y = b}$** es una **asíntota horizontal** del gráfico de la función f si se cumple al menos una de las dos siguientes condiciones:

1. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ **2.** $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

Ejemplo 1.7.6 La recta $y = 3$ es una asíntota horizontal de la función:



$$y = \frac{3x^2}{x^2+1}$$

En efecto, en el ejemplo 1.7.3 vimos que:

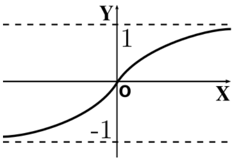
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3 = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2+1}$$

Ejemplo 1.7.7 Hallar las asíntotas horizontales de la *tangente hiperbólica*:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Solución

La tangente hiperbólica tiene dos asíntotas horizontales, $y=-1$ y $y=1$.



$\boldsymbol{y = \tanh x}$

En efecto, de acuerdo al ejemplo 1.7.5, tenemos:

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\tanh(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=1$$

Ejemplo 1.7.8

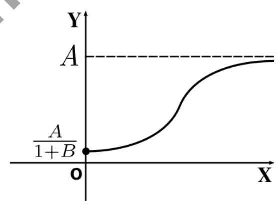
Probar que la recta $y=A$ es una asíntota horizontal de la *curva logística*:

$f(x)=\dfrac{A}{1+B\mathrm{e}^{-kx}}$, donde A, B, y k son constantes positivas.

Solución

Tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{A}{1+B\mathrm{e}^{-kx}}=\frac{A}{1+B\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{kx}}\right)}=\frac{A}{1+B(0)}=\frac{A}{1+0}=A$$



Ejemplo 1.7.9

Hallar las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la ecuación:

$$xy^2-y^2-4x-8=0$$

Solución

Si despejamos y $\left(y=\pm\sqrt{\frac{4x+8}{x-1}}\right)$ descubriremos que la gráfica de la ecuación es la unión de las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{\frac{4x+8}{x-1}}$ y $g(x)=-\sqrt{\frac{4x+8}{x-1}}$, así que debemos hallar el dominio de estas funciones. En este caso, ambas tienen el mismo dominio:

$$x\in\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Dom}(g)\Leftrightarrow\frac{4x+8}{x-1}\geq0\Leftrightarrow\frac{4(x+2)}{x-1}\geq0\Leftrightarrow\frac{x+2}{x-1}\geq0$$

Resolviendo esta desigualdad, obtenemos que:

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Dom}(g)=(-\infty,\,-2]\cup(1,\,+\infty).$$

1. Asíntotas Verticales:

El único punto que es candidato a proporcionar asíntotas verticales es 1.

Dado que las funciones no están definidas en los puntos próximos y a la izquierda de 1, bastará con calcular los límites a la derecha de 1 en ambas funciones.

Ya que, $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{4x+8} = \sqrt{12} > 0$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$ positivamente, se tiene que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{4x+8}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

Por otro lado,

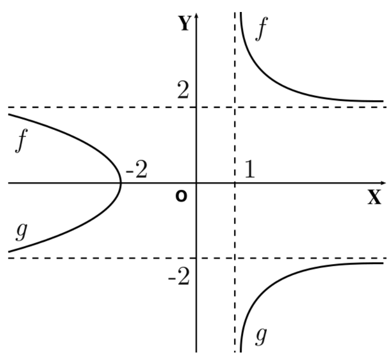
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} (-f(x)) = -\infty$$

Por lo tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical y es única.

2. Asíntotas Horizontales:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{1}{x}}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} g(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} (-f(x)) \\ &= -\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -2 \end{aligned}$$



Luego, asíntotas horizontales son $y = -2$ y $y = 2$.

PROBLEMAS RESUELTOS 1.7

Problema 1.7.1 Calcular el límite:

$$\lim_{x\to -\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3+1} \right]$$

Solución

Usando la identidad $a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$, con $a=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ y $b=\sqrt[3]{x^3+1}$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1} &= \frac{\left(x^3+x^2\right)-\left(x^3+1\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2}\,\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}} \\
&= \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2}\,\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}} \\
&= \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}}{x^2}+\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}+\frac{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}}{x^2}} \\
&= \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{\left(x^3+x^2\right)^2}{x^6}}+\sqrt[3]{\frac{x^3+x^2}{x^3}}\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{\left(x^3+1\right)^2}{x^6}}} \\
&= \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\,\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right] &= \frac{1-0}{\sqrt[3]{(1+0)^2}+\sqrt[3]{1+0}\,\sqrt[3]{1+0}+\sqrt[3]{(1+0)^2}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Problema 1.7.2 Hallar el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right]$$

Solución

Multiplicando y dividiendo por la conjugada:

$$
\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}
$$

$$= \frac{\left(x + \sqrt{x+\sqrt{x}} - x\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}$$

Luego,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\sqrt{0}}}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}+1} = \frac{1}{2}$$

Problema 1.7.3 Probar que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} - x\right] = -\frac{2}{3} = \lim_{x\to-\infty}\left[x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} - x\right]$$

Solución

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} - x &= x^{\frac{1}{3}}\left[(1-x)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right] \\ &= x^{\frac{1}{3}}\left[\left((1-x)^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2\right] \\ &= x^{\frac{1}{3}}\left[(1-x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right]\left[(1-x)^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right] \end{aligned}$$

Ahora, haciendo uso de las identidades $a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ y $a+b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$, con $a = (1-x)^{\frac{1}{3}}$ y $b = x^{\frac{1}{3}}$, se tiene que:

$$x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} - x =$$
$$x^{\frac{1}{3}}\left[\frac{(1-x)-x}{(1-x)^{\frac{2}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}\right]\left[\frac{(1-x)+x}{(1-x)^{\frac{2}{3}} - (1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}\right]$$

$$= x^{\frac{1}{3}}\left[\frac{1-2x}{(1-x)^{\frac{2}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}\right]\left[\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}-(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}\right]$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}}(1-2x)}{\left[(1-x)^{\frac{2}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right]\left[(1-x)^{\frac{2}{3}}-(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right]}$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{x}-2\right)}{\left[(1-x)^{\frac{2}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right]\left[(1-x)^{\frac{2}{3}}-(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right]}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}-2}{\left[\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right]\left[\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}-(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right]}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}-2}{\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{3}}+1\right]\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{3}}+1\right]}$$

Luego,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}-x\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-2}{\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{3}}+1\right]\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{3}}+1\right]}$$

$$= \frac{0-2}{\left[(0-1)^{\frac{2}{3}}+(0-1)^{\frac{1}{3}}+1\right]\left[(0-1)^{\frac{2}{3}}-(0-1)^{\frac{1}{3}}+1\right]}$$

$$= \frac{-2}{[1-1+1][1+1+1]}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

Siguiendo los mismos pasos anteriores, obtenemos:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}-x\right]=-\frac{2}{3}$$

Problema 1.7.4 **Probar el teorema 1.7.1**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{t}\right)$

Solución

Probaremos sólo la parte 1, ya que se procede de forma similar para la parte 2. Debemos probar que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$$

$(\Rightarrow)$ Debemos probar que:

$$\text{Dado } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } 0 < t < \delta \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{t}\right) - L \right| < \epsilon$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, para el ϵ dado, existe $N > 0$ tal que:

$$x > N \Rightarrow | f(x) - L | < \epsilon$$

Ahora, si $\delta = \frac{1}{N} > 0$, entonces:

$$0 < t < \delta = \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{t} > N \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{t}\right) - L \right| < \epsilon$$

$(\Leftarrow)$ Debemos probar que:

$$\text{Dado } \epsilon > 0, \text{ existe } N > 0 \text{ tal que } x > N \Rightarrow | f(x) - L | < \epsilon$$

Como $\lim\limits_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$, para el ϵ dado, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < t < \delta \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{t}\right) - L \right| < \epsilon$$

Ahora, si $N = \frac{1}{\delta} > 0$, entonces:

$$x > N = \frac{1}{\delta} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \delta \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) - L \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow | f(x) - L | < \epsilon$$

Problema 1.7.5 Hallar:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\operatorname{sen}x\right]$

Solución

1. Por el problema resuelto 1.7.4, haciendo $x=\frac{1}{t}$, se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{x}=\lim_{t\to0^-}\operatorname{sen}t=\operatorname{sen}0=0$$

2. Usando la identidad trigonométrica 41, tenemos:

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen}x=2\cos\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+x\right)\right]\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)\right]$$

$$=2\cos\left[x+\frac{1}{2x}\right]\operatorname{sen}\frac{1}{2x}$$

Considerando que $\left|\cos\left[x+\frac{1}{2x}\right]\right|\leq1$, se tiene:

$$0\leq\left|\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen}x\right|=\left|2\cos\left[x+\frac{1}{2x}\right]\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right|$$

$$=\left|2\cos\left[x+\frac{1}{2x}\right]\right|\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right|\leq2\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right|$$

Luego:

$$0\leq\lim_{x\to-\infty}\left|\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen}x\right|\leq2\lim_{x\to-\infty}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right| \tag{3}$$

Por la continuidad de la función valor absoluto y la parte (1), se tiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right|=\left|\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{2x}\right|=|\operatorname{sen}0|=|0|=0 \tag{4}$$

De (3) y (4) obtenemos que:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen}x\right]=0$$

Problema 1.7.6 **Probar el Teorema 1.7.2.**

Si n es un número entero positivo, entonces:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ **4.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Solución

Hacemos el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$. Ahora, de acuerdo al teorema 1.7.1:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{1}{t^n} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

2. Si n es par: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \lim\limits_{t\to0^-} \dfrac{1}{t^n} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

Si n es impar: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \lim\limits_{t\to0^-} \dfrac{1}{t^n} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^n} = \lim\limits_{t\to0^+} t^n = 0$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{t\to0^-} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^n} = \lim\limits_{t\to0^-} t^n = 0$

Problema 1.7.7 **Probar las partes 3 y 4 del teorema 1.7.3:**

3. $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ **4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Solución

1. Por definición, debemos probar que:

$$\text{Dado } M < 0,\ \exists\,\delta > 0 \text{ tal que } 0 < x < \delta \Rightarrow \ln x < M$$

Bien:

$$\ln x < M \Rightarrow x < \mathrm{e}^M. \text{ Tomamos } \delta = \mathrm{e}^M$$

Por otro lado, dado que x es parte del dominio de $y = \ln x$, debemos tener que $x > 0$.

Ahora, tenemos:

$$0 < x < \delta \Rightarrow 0 < x < \mathrm{e}^M \Rightarrow \ln x < \ln \mathrm{e}^M = M$$

2. Por definición, debemos probar que:

$$\text{Dado } M > 0,\ \exists\, N > 0 \text{ tal que } x > N \Rightarrow \ln x > M$$

Bien,

$$\ln x > M \Rightarrow x > \mathrm{e}^{M}. \text{ Luego, tomamos } N = \mathrm{e}^{M}$$

Ahora, tenemos:

$$x > N \Rightarrow x > \mathrm{e}^{M} \Rightarrow \ln x > \ln \mathrm{e}^{M} = M$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.7

En los problemas del 1 al 9, calcular: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **y** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **2.** $f(x) = \dfrac{-1}{x^3}$ **3.** $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ **5.** $f(x) = \frac{x^3-8}{2x^3-3x^2+1}$ **6.** $f(x) = x^5 - 4x^4$

7. $f(x) = -2x^6 + 5x^5$ **8.** $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ **9.** $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$

En los problemas del 10 al 31, calcular el límite indicado.

10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x + \sqrt{x})$ **11.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x})$ **12.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$ **14.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ **15.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{-8x^3+x+1}}{x-1}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$ **17.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)$

18. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+5} - x\right)$ **19.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt[3]{1-x^3}\right)$

20. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ **21.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ **23.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x$

24. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{6}\right)$ **25.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sen}\sqrt{x+2} - \operatorname{sen}\sqrt{x}\right)$

26. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ **27.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{3x}+e^{-3x}}$

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10^x}{10^x+1}$ **29.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{-0.6x}+\frac{1}{x}\right)$ **30.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x^2}\right)$

31. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2+x)-\ln(1+x)\right]$

32. Dada la función racional $f(x)=\frac{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0}$, $a_n\neq 0$ y $b_m\neq 0$:

a. si $n=m$, probar que: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\frac{a_n}{b_m}$

b. si $n<m$, probar que: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$

c. si $n>m$, probar que: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{si } \frac{a_n}{b_m}>0\\ -\infty, & \text{si } \frac{a_n}{b_m}<0\end{cases}$

33. Dar una definición rigurosa de:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ **d.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

34. Probar que todo polinomio de grado impar tiene una raíz (real).
Sugerencia: Hallar los límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

En los problemas del 35 al 41, hallar las asíntotas horizontales del gráfico de la función dada.

35. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ **36.** $g(x)=\dfrac{1}{x(x+2)}$ **37.** $g(x)=\dfrac{x}{4x^2-1}$

38. $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ **39.** $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ **40.** $h(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

41. $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$

En los problemas del 42 al 44, hallar las asíntotas verticales y horizontales del gráfico de la ecuación dada.

42. $2x^2+yx^2=16y$ **43.** $(y^2-4)(x-1)=8$ **44.** $x^2y^2=2y^2+x^2+1$

SECCION 1.8

LOS LÍMITES Y EL NÚMERO e

El el capítulo 4 del libro *Precálculo para Todos* fuimos algo "temerarios" al adelantar un concepto del numero **e** sin tener conocimientos sobre límites; sin embargo, hoy ya estamos en condiciones de definir a este fascinante número.

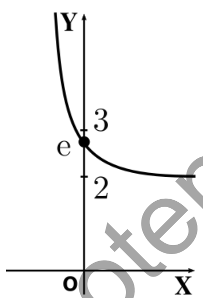
Definición El **número e** se define como el siguiente límite:

$$\mathbf{e} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \tag{1}$$

Esta definición debe justificarse probando que dicho límite existe; una tarea habitual en los cursos avanzados de Cálculo. Por consiguiente, no contamos aún con las herramientas para lograrla. En dichas demostraciones también se corrobora que este límite es un número *irracional*.

A modo de ilustración, tenemos la siguiente tabla y el gráfico de la función en cuestión:

$$\boldsymbol{y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}}$$



x	$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$
0.000001	2.718280460
0.0000001	2.718281693
$\downarrow$ $\mathbf{0}$ $\uparrow$	$\downarrow$ $\mathbf{e}$ $\uparrow$
-0.0000001	2.718281964
-0.000001	2.718283188

Esta tabla nos da una aproximación de **e**, con 6 cifras decimales:

$$\mathrm{e} \approx 2.718281$$

Si, en el límite (1), hacemos el cambio de variable $z = \frac{1}{x}$, tenemos que:

$$x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \to 0^+ \ \text{ y } \ x \to 0^- \quad \Leftrightarrow \quad z \to +\infty \ \text{ y } \ z \to -\infty$$

Por consiguiente, el límite (1) es equivalente a decir que se cumplen, de forma simultanea, los dos siguientes límites:

$$(2) \quad \mathbf{e} = \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \qquad (3) \quad \mathbf{e} = \lim_{z \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$$

El siguiente teorema presenta límites notables que incorporan al número e.

Teorema 1.8.1

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{bx}-1}{x} = b$ **4.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

Demostración

1. Si $a=0$, el resultado es obvio. Veamos el caso $a\neq 0$.

Sea $y=ax$. Se tiene que:

$$x=\frac{y}{a},\ \frac{1}{x}=\frac{a}{y}$$

Además:

$$x\to 0 \Leftrightarrow y\to 0$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{a}{y}} = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^a = \mathrm{e}^a$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\mathrm{e} = 1$$

3. Sea $y=\mathrm{e}^{bx}-1$. Se tiene que:

$$\mathrm{e}^{bx}=1+y, \quad x=\frac{1}{b}\ln(1+y) \quad \text{y} \quad x\to 0\Leftrightarrow y\to 0.$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{bx}-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{1+y-1}{\frac{1}{b}\ln(1+y)} = b\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}$$

$$= b\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$= b\left(\frac{1}{1}\right) = b$$

4. Considerando que $a^x = e^{x \ln a}$, y la parte 3 del presente teorema (con $b = \ln a$), tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \ln a$$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.8

Problema 1.8.1 Hallar: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \\
&= \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} \right) \left(\frac{\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \right) = \left(\frac{1}{e^0} \right) \left(\frac{1}{1} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.8

Hallar los siguientes límites:

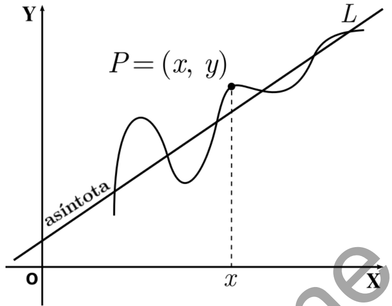
1. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + ax)}{x}$ **2.** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(a + x) - \ln a}{x}$ **3.** $\displaystyle \lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$

4. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ **5.** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ **6.** $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$

SECCION 1.9

ASÍNTOTAS OBLICUAS

Además de las asíntotas *verticales* y *horizontales*, tenemos las asíntotas *oblicuas.* En general, se dice que una recta L es una asíntota oblicua de una curva C si la distancia $d(P, L)$ de un punto P, de la curva C, a la recta L, tiende a 0 a medida que P se aleja del origen de coordenadas.



Cuando la curva es la gráfica de una función, esta idea es captada en la siguiente definición:

Definición

La recta $\boldsymbol{L: \ y = mx + b}$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$ si se cumple que:

$$(1) \ \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \vee \quad (2) \ \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

En términos más precisos:

- $\boldsymbol{y = mx + b}$ es una **asíntota oblicua a la derecha** si sucede (1).
- $\boldsymbol{y = mx + b}$ es una **asíntota oblicua a la izquierda** si sucede (2).

Las condiciones (1) y (2) nos dicen que cuando $x \to +\infty$, o cuando $x \to -\infty$, la distancia entre el punto $(x, f(x))$ del gráfico, y el punto $(x, mx + b)$ de la recta, tiende a cero.

Observe que las asíntotas horizontales son un caso particular de estas asíntotas oblicuas, ya que una asíntota oblicua con $m = 0$ es horizontal. Para nuestro entendimiento, cuando hagamos referencia una asíntota oblicua estaremos asumiendo que no es horizontal, es decir, $m \neq 0$.

Por la unicidad del límite, toda gráfica tiene, a lo más, una asíntota oblicua a la derecha cuando $x \to +\infty$. De igual forma, toda gráfica tiene, a lo más, una asíntota oblicua a la izquierda cuando $x \to -\infty$. Por otro lado, una misma recta puede ser una asíntota oblicua a la derecha y una asíntota oblicua a la izquierda al mismo tiempo.

Entre las funciones que presentan asíntotas oblicuas están las funciones racionales $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, cuyo grado del numerador $p(x)$ es una unidad mayor que el grado del denominador $q(x)$. En efecto, si dividimos $p(x)$ entre $q(x)$, se tiene que:

$$f(x) = mx + b + \frac{h(x)}{q(x)},$$

donde el grado del polinomio $h(x)$ del numerador es menor que el grado del denominador $q(x)$. En consecuencia:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{h(x)}{q(x)} = 0$$

Este resultado nos dice que la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua, tanto a la derecha como a la izquierda, de la gráfica de $y = f(x)$. En efecto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (mx+b)] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(mx + b + \frac{h(x)}{q(x)}\right) - (mx+b)\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{h(x)}{q(x)} = 0\end{aligned}$$

Ejemplo 1.9.1 Hallar las asíntotas oblicuas en el gráfico de la función:

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$$

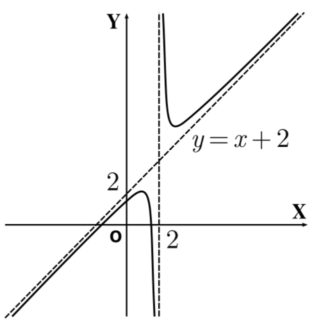
Solución

Tenemos que:

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x-2} = x + 2 + \frac{1}{x-2}$$

Luego, $y = x + 2$ es una asíntota oblicua.

Observe que $x = 2$ es una asíntota vertical.



¿Cómo podemos encontrar las asíntotas oblicuas si $y = f(x)$ no es función racional? es decir, si $y = mx + b$ es una asíntota ¿como hallar las constantes m y b? El siguiente teorema responde a esta interrogante.

Teorema 1.9.1

1. $\boldsymbol{y = mx + b}$ es una asíntota oblicua a la **derecha** de $\boldsymbol{y = f(x)}$:

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = b$$

2. $\boldsymbol{y = mx + b}$ es una asíntota oblicua a la **izquierda** de $\boldsymbol{y = f(x)}$:

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = b$$

Demostración

Ver el problema resuelto 1.9.4.

Ejemplo 1.9.2 Hallar las asíntotas oblicuas en el gráfico de:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Solución

Asíntota oblicua a la derecha.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}$$

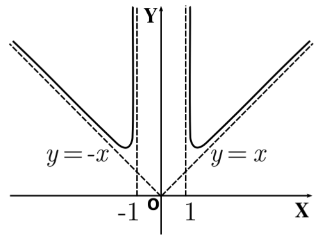
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)\left[\frac{\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}{x}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-0}\,(+\infty)} = 0$$

Luego, $y = x$ es asíntota oblicua a la derecha.

Asíntota oblicua a la izquierda.



Podríamos proceder como en el caso anterior, calculando los límites respectivos cuando $x \to -\infty$; sin embargo, la función es par $(f(-x) = f(x))$, por lo que su gráfico debe ser simétrico con respecto al eje Y.

Teniendo en cuenta esta condición, concluimos que la asíntota oblicua a la izquierda es $y = -x$.

Observe que las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

PROBLEMAS RESUELTOS 1.9

Problema 1.9.1 Hallar las asíntotas oblicuas en el gráfico de:

$$f(x) = \tan^{-1}(x) - x$$

Solución

Considerando que $\lim\limits_{x\to+\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$, y que $\lim\limits_{x\to-\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$, se tiene que:

Asíntota oblicua a la derecha.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x) - x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x} - 1\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x}\right) - 1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(\tan^{-1}(x) - x\right) - (-x)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Luego, $y = -x + \frac{\pi}{2}$ es una asíntota a la derecha de $f(x) = \tan^{-1}(x) - x$

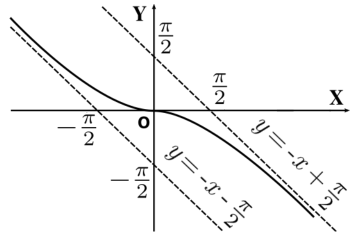
Asíntota oblicua a la izquierda.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x) - x}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x} - 1\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\tan^{-1}(x)}{x}\right) - 1 = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - mx]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\left(\tan^{-1}(x) - x\right) - (-x)\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$$



Luego, $y = -x - \frac{\pi}{2}$ es una asíntota a la izquierda de:

$$f(x) = \tan^{-1}(x) - x$$

Problema 1.9.2 Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$$

Solución

Asíntota oblicua a la derecha.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

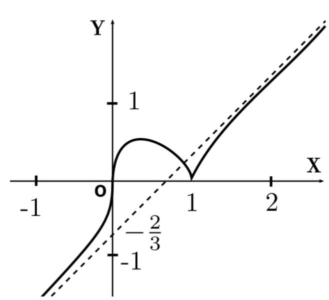
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{\frac{2}{3}} = (0-1)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Por otro lado, de acuerdo al problema resuelto 1.7.3, tenemos:

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty}\left[x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} - x\right] = -\frac{2}{3}$$

Luego, $y = x - \frac{2}{3}$ es asíntota oblicua a la derecha de:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$$



Asíntota oblicua a la izquierda.

De forma análoga a la parte anterior, obtenemos que la recta $y = x - \frac{2}{3}$ es asíntota oblicua a la izquierda de:

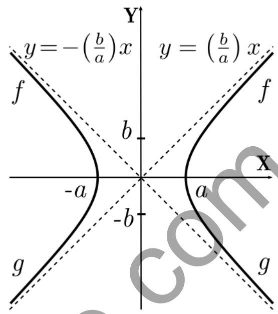
$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$$

Problema 1.9.3

Demostrar que las rectas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ son asíntotas oblicuas de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución



La hipérbola se puede considerar como la unión de los gráficos de las funciones f y g a continuación.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right)$$
$$\Leftrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Ahora, dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

La gráfica de f es la parte de la hipérbola sobre el eje X, y la de g es la parte inferior al eje X.

Mostraremos que las rectas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ son asíntotas oblicuas de ambas funciones, f y g. Verificaremos este resultado sólo para f, ya que para el caso de g, el proceso es exactamente igual.

Para evitar confusiones, dado que la letra b aparece tanto en la ecuación de la de la hipérbola, como de la asíntota, resaltaremos las expresiones correspondientes a la ecuación de la asíntota ($\boldsymbol{y = mx + b}$).

$$\boldsymbol{m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{1}{x}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\frac{1}{|\,x\,|}\sqrt{x^2 - a^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}\right) = \frac{b}{a}\sqrt{1-0} = \frac{b}{a}$$

$$\boldsymbol{b} = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right]$$
$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2 - a^2} - x\right] = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a}(0) = 0$$

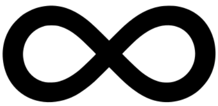
Luego, $y = \dfrac{b}{a}x$ es una asíntota oblicua por la derecha.

Similarmente::

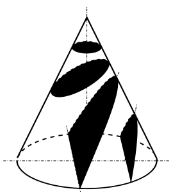
$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{b}{a}, \qquad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = 0$$

Luego, $y = -\frac{b}{a}x$ es una asíntota oblicua por la izquierda.

¿Sabías esto?



El símbolo que hoy conocemos como ***infinito*** *(∞) fue introducido como su representación simbólica en la obra* ***Sobre las Secciones Cónicas****, escrita por el matemático Británico* ***John Wallis*** *(1616–1703) en el año 1656 .*



Esta fue la primera publicación donde se hizo referencia a las cónicas como ***curvas planas*** *que, a su vez, son instancias de ecuaciones de segundo grado; omitiendo el criterio histórico de definirías como secciones de un cono circular recto.*

Problema 1.9.4 **Demostrar el teorema 1.9.1.**

1. $\boldsymbol{y = mx + b}$ es una asíntota oblicua a la **derecha** de $\boldsymbol{y = f(x)}$ si y solo si:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = b$$

2. $\boldsymbol{y = mx + b}$ es una asíntota oblicua a la **izquierda** de $\boldsymbol{y = f(x)}$ si y solo si:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = b$$

Solución

Parte 1.

($\Rightarrow$) Si $y = mx + b$ es una asíntota oblicua a la derecha de $y = f(x)$, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \tag{1}$$

Sacando factor común x, tenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Puesto que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$, para que se cumpla la igualdad anterior, debemos tener que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Aún más. Puesto que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0$, tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = 0$$

De donde $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$

Por otro lado, teniendo en cuenta (1), se obtiene que:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = b$$

$(\Leftarrow)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - mx - b] = 0$

Luego, $y = mx + b$ es una asíntota a la derecha de $y = f(x)$.

Parte 2

Se procede como en la parte 1.

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.9

Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de las siguientes funciones:

1. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ **2.** $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ **3.** $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

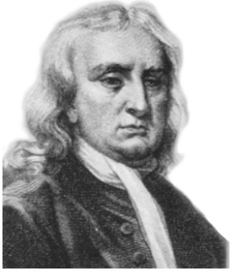
4. $y = \dfrac{2x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$ **5.** $y = \sqrt{x^2-1}$ **6.** $y = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

7. $f(x) = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}$ **8.** $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$

2

DIFERENCIACIÓN

Isaac Newton
(1642 - 1727)



Isaac Newton nació en Woolsthorpe, Inglaterra, en plena navidad del año 1642. Su obra cambió el pensamiento científico de su época, y sus ideas siguen vigentes en la ciencia actual.

En 1661, ingresó al *Trinity College* de Cambrige, a sus 18 años, donde conoció al ilustre matemático *Isaac Barrow* (1630-1677). Newton se graduó en el año 1665, el mismo año de la epidemia londinense conocida como *la gran plaga*, obligando a la universidad a cerrar sus puertas por año y medio; hecho que le condujo a resguardarse en la granja de su familia en su pueblo natal. Se dice que fue en esas tierras donde ocurrió el famoso *incidente de la manzana*, donde Newton relacionó la caída de una manzana, desde un árbol, con la atracción gravitacional que ejerce la tierra sobre la luna; dando origen a la *ley de la gravitación universal*.

También fue en esta época cuando desarrolló el *el método de las fluxiones*, uno de los cimientos del Cálculo Diferencial. Estas ideas también fueron desarrolladas simultáneamente, y de forma independiente, por el matemático y filósofo alemán, *G. Leibniz* (1646-1716). Por este motivo se les concede la paternidad del Cálculo a ambos personajes.

En 1667 regresa a Cambrige. Dos años después, Borrow renuncia a su cargo de profesor de matemáticas en el Trinity College a favor de Newton.

Aplicó sus investigaciones en óptica para construir el primer telescopio de reflexión, cuya invención le permitió ingresar a la *Sociedad Real*, la institución científica inglesa de mayor renombre, y de la cual llegó a ser su presidente.

En 1687 se publicó su obra capital: **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), en la que presenta las leyes de la mecánica clásica y su famosa teoría de la **gravitación universal**. Con esta obra ganó tal renombre, que le significó el título de *Caballero del Imperio* en 1705.

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Durante la vida de Sir Isaac Newton sucedieron varios hechos notables en América y en el mundo hispano. En 1706, nace en Boston *Benjamín Franklin*, científico y estadista norteamericano. El 22 de diciembre de 1721, Felipe V convierte el Colegio de Santa Rosa de Caracas en la Universidad de Caracas (Universidad Central), que es inaugurada en 1725.

SECCION 2.1

LA DERIVADA

La noción de derivada tuvo su origen en la búsqueda de soluciones a dos problemas, uno de la *Geometría* y otro de la *Física*, que son:

- encontrar rectas tangentes a una curva.
- hallar la velocidad instantánea de un objeto en movimiento.

El planteamiento del problema de las tangentes se remonta hasta la Antigua Grecia; sin embargo, pasaron siglos hasta el hallazgo de su solución.

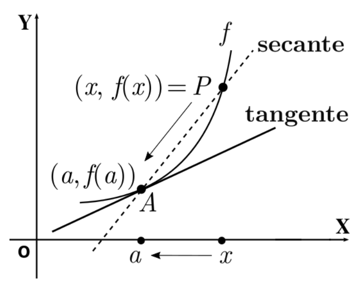
En el año 1629, Pierre Fermat encontró un método muy interesante para construir las tangentes a una parábola. Su idea fue la de considerar a la recta tangente como la posición límite de rectas secantes. Este método, como veremos a continuación, contiene implícitamente el concepto de derivada. A partir de aquí, no pasó mucho tiempo para que Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716), dos gigantes de la matemática, iniciaran el estudio sistemático de la derivada, con lo que dieron origen al Cálculo Diferencial.

RECTA TANGENTE

Sea $y = f(x)$ una función real de variable real, y sea $A = (a,\, f(a))$ un punto fijo de su gráfico. Buscamos la recta tangente al gráfico de la función en el punto A. Para no tener dificultades, vamos a asumir que nuestra función es continua y su gráfico se desarrolla suavemente (sin vértices). Tomemos otro punto $P = (x,\, f(x))$ del gráfico, cercano al punto de tangencia $A = (a, f(a))$, y tracemos la recta secante que pasa por A y P.

Si movemos a P sobre el gráfico, en tal forma que P se aproxime a A, la recta secante se aproximará a la recta tangente.

La secante coincidirá con la tangente en el límite. Es decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante cuando P tiende a A.



Veamos el punto anterior en forma analítica. Como la recta tangente pasa por el punto $A = (a,\, f(a))$, entonces bastará encontrar su pendiente para obtener su ecuación. Luego, la pendiente de la recta secante que pasa por $P = (x,\, f(x))$ y $A = (a,\, f(a))$, es la siguiente:

$$m_{PA} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ahora, cuando el punto $P = (x,\, f(x))$ se aproxima a $A = (a,\, f(a))$, la secante se aproxima a la tangente, y la pendiente de la secante se aproximará a la pendiente de la tangente. Pero, decir que $P = (x,\, f(x))$ se aproxima a $A = (a,\, f(a))$ equivale a decir que x se aproxima a a. Es pues, razonable establecer que la pendiente m de la recta tangente al gráfico de la función $y = f(x)$ en el punto $A = (a,\, f(a))$ es la siguiente:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{(i)}$$

VELOCIDAD INSTANTÁNEA

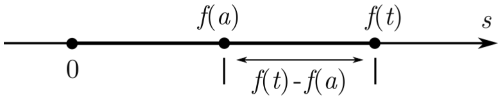
Supongamos que un automóvil atraviesa dos ciudades separadas por una distancia de 180 kilómetros, y que estos, los recorre en 3 horas. Quiere decir que el automóvil viajó a una velocidad promedio de $\frac{180}{3} = 60\, km/h$.

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Es evidente que el indicador de velocidad no ha permanecido estático en 60 km/h durante el recorrido, sino que ha presentado variaciones. Algunas veces marcando 0 (en los semáforos, por ejemplo) y otras marcando cifras mayores que 60. Esto es porque el indicador de velocidad registra la *velocidad instantánea* y no la velocidad promedio ¿Cómo se relacionan estas dos velocidades? Evaluemos esta interrogante desde un enfoque más general.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación $\boldsymbol{s = f(t)}$. Aquí, la variable $\boldsymbol{t}$ representa el tiempo, y la variable $\boldsymbol{s}$ representa el desplazamiento del objeto, contabilizado a partir del origen de coordenadas. A esta función $s = f(t)$ la llamaremos **función de posición**.

Buscamos una expresión para la velocidad instantánea en un instante fijo $\boldsymbol{a}$. A esta velocidad la denotaremos por $\boldsymbol{v(a)}$. Sea t un instante cualquiera cercano al instante a. En el intervalo de tiempo entre a y t, el cambio de posición del objeto es $f(t) - f(a)$.



$$\boldsymbol{s = f(t)}$$

La velocidad promedio en este intervalo de tiempo, desde a hasta t, es:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

Esta velocidad es una aproximación a la *velocidad instantánea* $\boldsymbol{v(a)}$.

La aproximación será mejor a medida que t se acerque más al instante a; por lo tanto, es natural establecer que:

$$\boldsymbol{v(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}} \tag{ii}$$

En ambos problemas (recta tangente y velocidad instantánea) hemos llegado a un mismo límite ((i) y (ii)). En este límite radica la esencia del Cálculo Diferencial. Su importancia rebasa a los problemas geométricos y físicos que le dieron origen, por ello merece ser tratado independientemente. Este límite es la *derivada*.

Definición La **derivada** de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$, denotada por $\boldsymbol{f'(a)}$, es el límite:

$$\boxed{\boldsymbol{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}} \qquad \textbf{(1)}$$

La derivada $\boldsymbol{f'(a)}$, al igual que cualquier límite, puede o no existir. En el caso de que exista, diremos que la función $\boldsymbol{f}$ **es diferenciable en el punto** $\boldsymbol{a}$.

En esta definición está implícito que f debe estar definida en un intervalo abierto que contiene a a.

El límite anterior se puede expresar de otra forma. Si $h = x - a$, entonces $x = a + h$ y $x \to a \Leftrightarrow h \to 0$. Luego, (1) equivale a:

$$\boxed{\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}} \qquad \textbf{(2)}$$

Es habitual designar a Δx (delta x) como la diferencia $x - a$. Esto es:

$$\boldsymbol{\Delta x = x - a}$$

En este caso, $x = a + \Delta x$ y $x \to a \Leftrightarrow \Delta x \to 0$.

Con esta notación podemos expresar los límites (1) y (2) como la expresión tradicional de la derivada:

$$\boxed{\boldsymbol{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}}} \qquad \textbf{(3)}$$

La expresión $\Delta x = x - a$ es el **incremento de** $\boldsymbol{x}$, y expresa el cambio que experimenta la variable independiente al pasar de a a $x = a + \Delta x$.

La diferencia $\Delta f = f(a+\Delta x) - f(a)$ es el **incremento de la función**, y expresa el cambio de los valores de la función al pasar de $f(a)$ a $f(a+\Delta x)$.

El cociente $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ es la **razón incremental**. De acuerdo a la igualdad (3), se tiene que:

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Podemos observar que la derivada es el límite de la razón incremental cuando Δx tiende a 0.

Para hallar la derivada podemos utilizar (1), (2) o (3), de forma indistinta.

Ejemplo 2.1.1 Dada la función $f(x) = x^2$, hallar $f'(3)$.

Solución

Usaremos la fórmula (1):

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3} (x+3) = 3+3 = 6$$

Ejemplo 2.1.2 Dada la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$, hallar $g'(-2)$.

Solución

Usaremos la fórmula (2) de la derivada:

$$g'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-2+h} - \frac{1}{-2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2-(-2+h)}{(-2)h(-2+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(-2)h(-2+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2(-2+h)} = \frac{1}{2(-2+0)} = -\frac{1}{4}$$

Ejemplo 2.1.3 Probar que f es diferenciable en 0, y que $f'(0) = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0, & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

Solución

Debemos probar que existe $f'(0)$ y que $f'(0)=0$. Recordando el problema resuelto 1.2.1, tenemos:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\operatorname{sen}\frac{1}{h}=0$$

Ejemplo 2.1.4 Probar que $f(x)=\sqrt[3]{x}$ no es diferenciable en 0.

Esto es: *no existe* $f'(0)$.

Solución

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-\sqrt[3]{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty$$

Como $+\infty$ no es un número real, concluimos que no existe $f'(0)$.

DERIVADAS POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA

Definición

La **derivada por la derecha** y la **derivada por la izquierda** de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ son los siguientes límites, respectivamente:

$$\boldsymbol{f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \qquad (2)$$

Es fácil ver que:

$$\exists\, \boldsymbol{f'(a)} \Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{f'_+(a)},\ \exists\, \boldsymbol{f'_-(a)} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{f'_+(a)=f'_-(a)}$$

Ejemplo 2.1.5 Dada la función valor absoluto $f(x)=\mid x\mid$.

a. Hallar $f'_+(0)$ **b.** Hallar $f'_-(0)$ **c.** Probar que f no es diferenciable en 0.

Solución

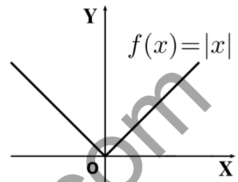
a. $$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mid x\mid-\mid 0\mid}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mid x\mid}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

b. $f'_{-}(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|\,x\,|-|\,0\,|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|\,x\,|}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

c. Dado que las derivadas laterales no son iguales, concluimos que no existe $f'(0)$; por lo tanto, $f(x) = |\ x\ |$ no es diferenciable en el punto 0. Este resultado puede explicarse geométricamente:

El gráfico de $f(x) = |\ x\ |$ tiene un vértice en el punto (0, 0). Este vértice no permite asignarle una recta tangente al gráfico en este punto, ya que al pasar de los puntos a la izquierda de (0, 0), a los de la derecha, hay un cambio brusco de pendientes de -1 a 1.



LA FUNCIÓN DERIVADA

Definición

La **derivada de la función** f es la función f' tal que su valor en un número x, del dominio de f, es la derivada de f en x:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

El dominio de f' está formado por los puntos x del dominio de f en los cuales existe. Es claro que el dominio de f' es un subconjunto del dominio de f.

Otro símbolo para f' es Df; esto es: $\boldsymbol{Df = f'}$. En el caso de que se quiera especificar la variable independiente, se escribe $\boldsymbol{D_x f}$, que se lee "*la derivada de f respecto a x*". Se tiene, entonces:

$$\boldsymbol{D_x f(x) = f'(x)}$$

Ejemplo 2.1.6

a. Probar que la derivada de $f(x) = x^2$ es la función $f'(x) = 2x$.

b. Usando la parte (a), hallar $f'(3)$ y observar que el resultado del ejemplo 2.1.1 es un caso particular del resultado (a).

Solución

a. Sea x un punto cualquiera del dominio de f.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Quiere decir que $f'(x) = 2x$; por lo que el dominio de f' es el mismo que el de f, que es $\mathbb{R}$.

b. En $f'(x) = 2x$, tomando $x = 3$, se tiene que $f'(3) = 2(3) = 6$. Este resultado coincide con el resultado obtenido en el ejemplo 2.1.1.

Ejemplo 2.1.7

a. Probar que la derivada de $g(x) = \dfrac{1}{x}$ es la función: $d_x g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

b. Usando la parte (a), hallar $D_x g(-2)$ y observar que el resultado del ejemplo 2.1.2 es un caso particular del resultado (a).

Solución

a. Sea x un punto cualquiera del dominio de g. Esto es, $x \neq 0$.

$$D_x g(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2}$$

Esto es, $D_x g(x) = g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

El dominio de $D_x g(x) = -\frac{1}{x^2}$, al igual que $g(x) = \frac{1}{x}$, es $\mathbb{R} - \{0\}$.

b. En $D_x g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, tomando $x = -2$, se tiene:

$$D_x g(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$$

Este resultado coincide con el resultado obtenido en ejemplo 2.1.2, que es:

$$g'(-2) = -\frac{1}{4}$$

LA NOTACIÓN DE LEIBNIZ

Además de las, ya presentadas, notaciones de la función derivada, también existen otras notaciones, como la *notación clásica* que fue introducida por *Leibniz* durante los orígenes del Cálculo.

Esta notación usa cualquiera de las cuatro expresiones a continuación para designar la derivada de una función $y = f(x)$:

1. $\dfrac{dy}{dx}$ **2.** $\dfrac{df}{dx}$ **3.** $\dfrac{df(x)}{dx}$ **4.** $\dfrac{d}{dx}(f(x))$

En el ejemplo 2.1.6, encontramos que la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. Con la notación de Leibniz, este resultado se escribe así:

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{d\left(x^2\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$$

Si en lugar de $f(x) = x^2$ escribimos $y = x^2$, entonces su derivada se expresaría de la siguiente manera:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

Regresando a la notación incremental, si una función se denota por $y = f(x)$, entonces el incremento de la función podemos expresarlo así:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

y a la derivada, con la notación de Leibniz, así:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En esta expresión nos serviremos de un capítulo posterior para asignar significados propios a dx y a dy. Aquí, $\frac{dy}{dx}$ no debe interpretarse como una fracción, sino simplemente como otra notación para la derivada $f'(x)$. Si $y = f(x)$, la derivada $f'(a)$ se escribe así, con la notación de Leibniz:

$$y'(a), \quad \frac{dy}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{o} \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

Ejemplo 2.1.8 Probar que: $\boldsymbol{\dfrac{d}{dx}\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donde $x > 0$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Observe que el dominio de $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ es $(0, +\infty)$.

NOTA

Si una función se expresa mediante otras variables que no sean x o y, la notación de la derivada cambiará de acuerdo a las nuevas variables. Así, la derivada de la función $u = t^2$ se expresa así:

1. $u' = 2t$ **2.** $\dfrac{du}{dt} = 2t$ **3.** $\dfrac{d\left(t^2\right)}{dt} = 2t$ **4.** $D_t\left(t^2\right) = 2t$

DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

El siguiente resultado relaciona la diferenciabilidad con la continuidad.

Teorema 2.1.1

Si $\boldsymbol{f}$ **es diferenciable** en el punto $\boldsymbol{a}$, entonces $\boldsymbol{f}$ **es continua en** $\boldsymbol{a}$.

Demostración

Consideremos la siguiente identidad:

$$f(x) - f(a) = (x - a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Tomemos límites a ambos lados:

$$\lim_{x \to a}\,[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a}\left[(x - a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]$$

$$= \left[\lim_{x \to a}(x - a)\right]\left[\lim_{x \to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right] = 0 \times f'(a) = 0$$

Esto es:

$$\lim_{x \to a}\,[f(x) - f(a)] = 0$$

De donde, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Esta igualdad nos dice que f es continua en a.

Observación

El recíproco del teorema anterior no se cumple. Una función puede ser continua en un punto y no ser diferenciable en ese punto. La función valor absoluto nos ilustra el caso, ya que esta función es continua en el punto 0; sin embargo, como vimos en el ejemplo 2.1.5, esta no es diferenciable en 0.

Una situación similar ocurre con la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ del ejemplo 2.1.4, la cual también es continua en 0, pero no es diferenciable en ese punto.

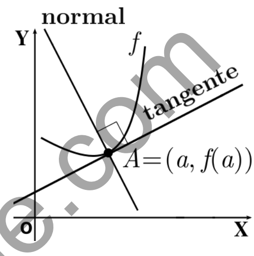
RECTAS TANGENTES

Ahora vamos a dar respaldo oficial al problema geométrico de la recta tangente que nos sirvió de inspiración en la descripción del concepto de derivada.

$\boxed{\textbf{Definición}}$ Sea f una función diferenciable en el punto a.

a. La **recta tangente** al gráfico de la función f, en el punto $A = (a,\ f(a))$, es la recta que pasa por A y tiene por pendiente $m = f'(a)$.

Es decir, es la recta:



$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

b. La **recta normal** al gráfico de la función f, en el punto $A = (a,\ f(a))$, es la recta que pasa por A y es perpendicular a la recta tangente en A.

Es decir, es la recta:

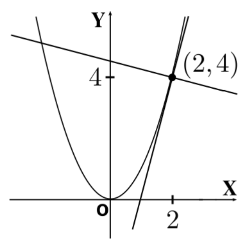
$$\boldsymbol{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)}, \quad \text{donde } \boldsymbol{f'(a) \neq 0}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo 2.1.9}}$ Sea la función $f(x) = x^2$. Hallar:

a. la recta tangente al gráfico de f en el punto $(2,\ 4)$.

b. la recta normal al gráfico de f en el punto $(2,\ 4)$.

Solución



a. En el ejemplo 2.1.6 se probó que la derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.

Cuando $x = 2$, tenemos $f'(2) = 2(2) = 4$.

Luego, la recta tangente a f en el punto $(2,\ 4)$ es:

$$y - f(2) = f'(x)(x - 2) \Rightarrow y - 4x + 4 = 0$$

b. La recta normal al gráfico de f en el punto $(2,\ 4)$ es:

$$y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow 4y + x - 18 = 0$$

Ejemplo 2.1.10 Dada la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Hallar:

a. la recta tangente al gráfico de g en el punto donde $x = -\frac{1}{2}$

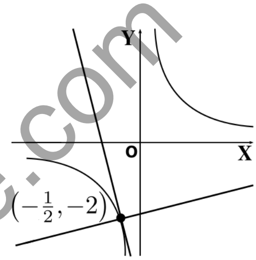
b. la recta normal al gráfico de g en el punto donde $x = -\frac{1}{2}$

Solución

a. Hallemos $g'\left(-\frac{1}{2}\right)$. Por el ejemplo 2.1.7 (parte a), sabemos que:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{por lo tanto:}$$

$$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -4$$



Por otro lado, $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$.

Luego, la recta tangente buscada es:

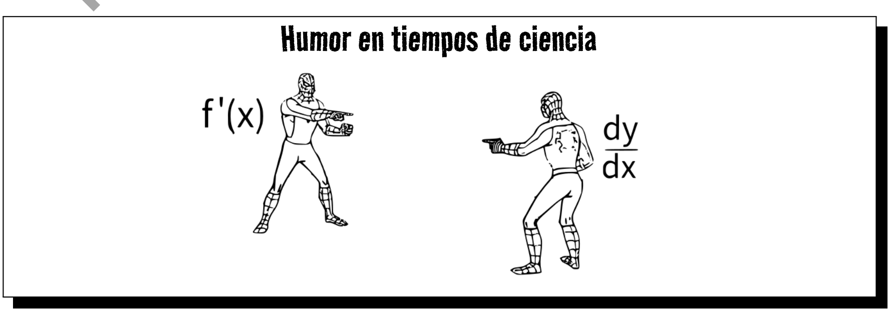
$$y - g\left(-\frac{1}{2}\right) = g'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow y - (-2) = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y + 4x + 4 = 0$$

b. La recta normal buscada es:

$$y - g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{g'\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow y - (-2) = -\frac{1}{-4}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 8y - 2x + 15 = 0$$



PROBLEMAS RESUELTOS 2.1

Problema 2.1.1 Hallar a y b para que f sea diferenciable en 1:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

Solución

Por el teorema 2.1.1, si f es diferenciable en 1, entonces f debe ser continua en 1. Luego:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Pero,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x}=1,$$

Además,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} (ax+b)=a+b$$

Luego, $a+b=1$.

Por otro lado, por ser f diferenciable en 1, la derivada por la derecha en este punto debe ser igual a su derivada por la izquierda. Esto es:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{2} \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{a(1+h)+b-(a+b)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{ah+(a+b)-(a+b)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{ah+(1)-(1)}{h} && \text{(por (1))}\\
&= \lim_{h\to 0^-}\frac{ah}{h} = a && (3)
\end{aligned}$$

Por (2) y (3):

$$a = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

Finalmente, de (1) y (4), obtenemos que:

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{2}$$

Problema 2.1.2 Hallar la derivada de la función $f(x) = x^3$.

Solución

Sea x un punto cualquiera del dominio de f.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right)-x^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\left[3x^2+3xh+h^2\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[3x^2+3xh+h^2\right] = 3x^2
\end{aligned}$$

Luego, $f'(x) = 3x^2$, o bien, $\frac{d\left(x^3\right)}{dx} = 3x^2$, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$.

Problema 2.1.3 Hallar la derivada de la función $f(x) = |\, x \,|$.

Solución

Por el ejemplo 2.1.5, sabemos que no existe $f'(0)$; pero veamos qué sucede cuando $x \neq 0$:

Si $x > 0$, entonces $|\, x \,| = x$.

Tomamos h suficientemente pequeño para que $x + h > 0$. Luego:

$$|\, x + h \,| = x + h$$

En este caso tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|\, x+h \,| - |\, x \,|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Si $x < 0$, entonces $|\, x \,| = -x$.

Tomamos h suficientemente pequeño para que $x + h < 0$. Luego:

$$|\, x + h \,| = -(x + h)$$

En este caso tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|\, x+h \,| - |\, x \,|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

En conclusión, la derivada de la función $f(x) = |\, x \,|$ es:

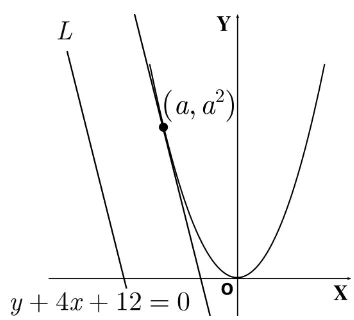
$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{con dominio } \mathbb{R} - \{0\}.$$

Problema 2.1.4

La tangente a la parábola $y = x^2$, en cierto punto P, es paralela a la recta $L : y + 4x + 12 = 0$. Hallar el punto P y la recta tangente.

Solución

Sea $P = (a,\, a^2)$. Por el ejemplo 2.1.6, sabemos que $y' = 2x$. Luego, la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en $P = (a,\, a^2)$, es $m = 2a$.



Pero, la pendiente de la recta:

$$L: \ 4x + y + 12 = 0 \ \text{ es } \ -4.$$

L y la tangente son paralelas; en consecuencia, ambas deben compartir la misma pendiente. Luego:

$$2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

Por lo tanto, el punto buscado es:

$$P = \left(-2, \, (-2)^2\right) = (-2, \, 4)$$

La recta tangente a la parábola en $P = (-2, \, 4)$ es:

$$y - 4 = -4(x - (-2)), \ \text{ es decir, } \ 4x + y + 4 = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.1

En los problemas del 1 al 9, hallar la derivada de la función en el punto a indicado.

1. $f(x) = 2$ en $a = 1$ **2.** $g(x) = x$ en $a = 3$ **3.** $h(x) = 3x$ en $a = 2$

4. $f(x) = 4x - 1$ en $a = 2$ **5.** $g(x) = 2x^2 - 5$ en $a = -1$

6. $h(x) = \frac{3}{x}$ en $a = -2$ **7.** $f(x) = 3x^2 - 5$ en $a = -1$

8. $g(x) = x + \frac{1}{x}$ en $a = 2$ **9.** $h(x) = x^3 + 2$ en $a = -1$

10. Probar que la siguiente función es diferenciable en 0:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } \ x \leq 0 \\ 0, & \text{si } \ x > 0 \end{cases}$$

11. Probar que la siguiente función no es diferenciable en 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{si } \ x \leq 0 \\ 1 - x, & \text{si } \ x > 0 \end{cases}$$

12. Hallar los valores de a y b para que f sea diferenciable en 1:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x < 1 \\ \sqrt[3]{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En los problemas del 13 al 21, hallar la derivada de la función.

13. $f(x) = 2$

14. $g(x) = x$

15. $h(x) = 3x$

16. $f(x) = 4x - 1$

17. $g(x) = 2x^2 - 5$

18. $h(x) = \frac{3}{x}$

19. $f(x) = 3x^2 - 5$

20. $g(x) = x + \frac{1}{x}$

21. $h(x) = x^3 + 2$

22. Dada la función $f(x) = x^3 + x^2$:

- **a.** hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.
- **b.** hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.
- **c.** hallar la recta normal al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.

23. Dada la función $g(x) = \sqrt{x - 3}$:

- **a.** hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de g en el punto donde $x = 12$.
- **b.** hallar la recta tangente al gráfico de g en el punto donde $x = 12$.
- **c.** hallar la recta normal al gráfico de g en el punto donde $x = 12$.

24. Dada la función $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 7$:

- **a.** hallar su función derivada.
- **b.** ¿en qué punto del gráfico de h la tangente es paralela a la recta $y = 3x + 6$?.
- **c.** hallar la recta tangente al gráfico de h en el punto encontrado en la parte b.

25. Dada la función $f(x) = \sqrt{2x + 1}$:

- **a.** hallar la función derivada de f.
- **b.** hallar una ecuación de la tangente al gráfico que tiene por pendiente $\frac{1}{2}$.

SECCION 2.2

TÉCNICAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

Al proceso de hallar la derivada de una función se le denomina **derivación** o **diferenciación**. En la sección anterior, este proceso fue llevado a cabo aplicando directamente la definición; lo cual dependía del laborioso y tedioso trabajo de calcular ciertos límites. En esta sección vamos a introducir algunos teoremas que nos permitirán encontrar la derivada de un gran número de funciones de forma rápida y mecánica, y sin tener que recurrir a los límites.

Teorema 2.2.1 **Regla de la constante.**

Si f es la función constante $\boldsymbol{f(x)=c}$, entonces:

$$\boldsymbol{f'(x)=0,} \qquad \text{o bien,} \qquad \boldsymbol{D_x c = 0,} \quad \boldsymbol{\frac{dc}{dx}=0}$$

Demostración

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Ejemplo 2.2.1 Resolver:

a. $D_x(2)=0$ **b.** $\dfrac{d(-8)}{dx}=0$ **c.** $\dfrac{d\left(\sqrt{3}\right)}{dx}=0$ **d.** $D_x(\pi)=0$

Teorema 2.2.2 **Regla de la potencia.**

Si $\boldsymbol{f(x)=x^n}$ y n es un número real, entonces:

$$\boldsymbol{f'(x)=nx^{n-1},} \quad \text{o bien,} \quad \boldsymbol{D_x\left(x^n\right)=nx^{n-1},} \quad \boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}}$$

Demostración

Nos limitaremos a probar este teorema para el caso en el que n es natural.

Tomando en cuenta el problema resuelto 1.2.6, tenemos:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$$

COROLARIO

La derivada de la función identidad, $f(x) = x$, es la siguiente:

$$\boldsymbol{f'(x) = 1} \qquad \text{O bien,} \qquad \boldsymbol{\frac{dx}{dx} = 1, \quad D_x(x) = 1}$$

Demostración

$$D_x(x) = D_x\left(x^1\right) = 1x^0 = 1$$

Ejemplo 2.2.2 Resolver:

a. $D_x\left(x^2\right) = 2x$ **b.** $\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$ **c.** $D_x\left(x^4\right) = 4x^3$

Ejemplo 2.2.3 Resolver:

a. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

b. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Teorema 2.2.3 $\boldsymbol{\dfrac{d}{dx}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x.}$ **O bien,** $\boldsymbol{D_x\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^x}$

Demostración

De acuerdo al teorema 1.8.1 (parte 3), tenemos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

Ahora, si $f(x) = \mathrm{e}^x$, tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^h - 1\right)}{h} = \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x(1) = \mathrm{e}^x$$

DERIVADA DE UNA SUMA O DIFERENCIA

Teorema 2.2.4 **Regla de la suma y de la diferencia.**

Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son funciones diferenciables en x, entonces $\boldsymbol{f \pm g}$ es diferenciable en x, y se cumple que:

$$\boldsymbol{(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)} \quad \text{o, simplemente,} \quad \boldsymbol{(f \pm g)' = f' \pm g'}$$

Con las otras notaciones, la regla de la suma o diferencia se expresa así:

$$D_x\left[f(x) \pm g(x)\right] = D_x f(x) \pm D_x g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \frac{d}{dx}\left(f(x)\right) \pm \frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$$

Demostración

$$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x)$$

Este resultado se puede extender fácilmente al caso de varios sumandos.

Ejemplo 2.2.4 Resolver:

a. $D_x\left[\mathrm{e}^x + x^3\right] = D_x\left[\mathrm{e}^x\right] + D_x\left[x^3\right] = \mathrm{e}^x + 3x^2$

b. $D_x\left[x^4 - x^2 + 5\right] = D_x\left(x^4\right) - D_x\left(x^2\right) + D_x(5) = 4x^3 - 2x + 0 = 4x^3 - 2x$

DERIVADA DE UN PRODUCTO

Teorema 2.2.5 **Regla del producto.**

Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son funciones diferenciables en x, entonces $\boldsymbol{fg}$ es diferenciable en x, y se cumple que:

$$\boldsymbol{(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)} \quad \text{o, simplemente,} \quad \boldsymbol{(fg)' = fg' + gf'}$$

Con las otras notaciones, la regla del producto se expresa así:

$$D_x\left[f(x)g(x)\right] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)\frac{d}{dx}\left(g(x)\right) + g(x)\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$

Demostración

Ver el problema resuelto 2.2.10.

Ejemplo 2.2.5 Resolver: $D_x\left[\left(x^3+1\right)\left(x^2-8\right)\right]$

Solución

$$\begin{aligned} D_x\left[\left(x^3+1\right)\left(x^2-8\right)\right] &= \left(x^3+1\right)D_x\left[x^2-8\right]+\left(x^2-8\right)D_x\left[x^3+1\right] \\ &= \left(x^3+1\right)(2x-0)+\left(x^2-8\right)\left(3x^2+0\right) \\ &= 5x^4-24x^2+2x \end{aligned}$$

COROLARIO

Si c es una constante y f es una función diferenciable en x, entonces cf es diferenciable en x, y se cumple que:

$$\boldsymbol{(cf)'(x)=cf'(x)}$$

O, bien, $\boldsymbol{D_x\left[cf(x)\right]=cD_xf(x),\ \dfrac{d}{dx}\left[cf(x)\right]=c\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\right)}$

Demostración

Aplicando la regla del producto y la regla de la constante, tenemos que:

$$D_x\left[cf(x)\right]=cD_xf(x)+f(x)D_xc=cD_xf(x)+0=cD_xf(x)$$

Ejemplo 2.2.6 Resolver: $D_x\left[5x^3\right]$

Solución

$$D_x\left[5x^3\right]=5D_x\left[x^3\right]=5\left(3x^2\right)=15x^2$$

DERIVADA DE UN COCIENTE

Teorema 2.2.6 **Regla del cociente.**

Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son diferenciables en x, y $\boldsymbol{g(x)\neq 0}$, entonces $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$ es diferenciable en x, y se cumple que:

$$\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}}$$

o, simplemente, $\boldsymbol{\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{gf'-fg'}{g^2}}$

Con las otras notaciones:

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)D_xf(x)-f(x)D_xg(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)-f(x)\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)}{[g(x)]^2}$$

Demostración

Ver el problema resuelto 2.2.12.

Ejemplo 2.2.7 Resolver: $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{2x^3-1}{x^2+3}\right]$

Solución

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x^3-1}{x^2+3}\right]=\frac{\left(x^2+3\right)\frac{d}{dx}\left(2x^3-1\right)-\left(2x^3-1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+3\right)\left(6x^2\right)-\left(2x^3-1\right)(2x)}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{2x^4+18x^2+2x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

Ejemplo 2.2.8 Hallar las rectas tangentes horizontales a la curva:

$$y=\mathrm{e}^2\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$$

Solución

Teniendo en cuenta que e^2 es constante, aplicando la regla del cociente:

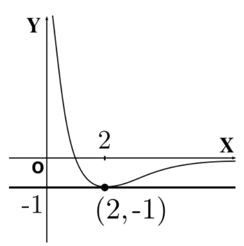
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\mathrm{e}^2\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}\right]=\mathrm{e}^2\frac{d}{dx}\left[\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}\right]=\mathrm{e}^2\frac{\mathrm{e}^x\frac{d}{dx}(1-x)-(1-x)\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^x\right)}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}$$

$$=\mathrm{e}^2\frac{\mathrm{e}^x(-1)-(1-x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}=\mathrm{e}^2\frac{\mathrm{e}^x(x-2)}{\mathrm{e}^{2x}}=\mathrm{e}^2\frac{x-2}{\mathrm{e}^x}$$

Las tangentes horizontales tienen pendiente 0:

$$\frac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^2\frac{x-2}{\mathrm{e}^x}=0\Leftrightarrow x=2$$

Luego, la curva dada tiene sólo una tangente horizontal en el punto donde $x=2$.



Reemplazando $x = 2$ en la ecuación de la curva:

$$y = \frac{\mathrm{e}^2(1-2)}{\mathrm{e}^2} = -1$$

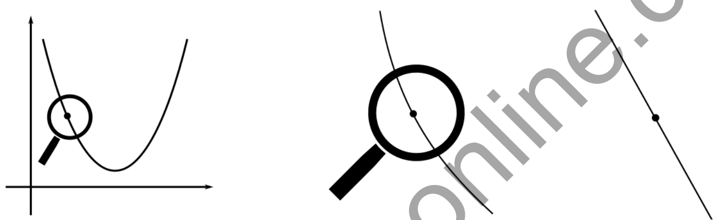
Luego:

Punto de tangencia: $(2, -1)$

Ecuación de la tangente: $y = -1$

¿Sabías esto?

Cualquier curva "amplificada" al límite en cualquiera de sus puntos, donde su derivada existe, se convierte en una recta. La derivada en cada uno de estos puntos equivale a la pendiente de la recta generada.



Desde esta perspectiva, la función exponencial natural e^x *es la única con la asombrosa propiedad de poseer una pendiente igual al valor de su misma función en cada punto de su dominio.*

PROBLEMAS RESUELTOS 2.2

Problema 2.2.1 Hallar la derivada de la función $y = x\sqrt{x}$

Solución

Podemos proceder de dos formas:

a. mediante la regla del producto.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x}\right) = x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\frac{d}{dx}(x) = x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

b. mediante la regla de la potencia.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Problema 2.2.2 Hallar la derivada de la función:

$$u = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{du}{dv} &= \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right) - \frac{d}{dv}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}\right)\\ &= \frac{d}{dv}\left(v^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{d}{dv}\left(3v^{-\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}-1} - 3\left(-\frac{2}{3}v^{-\frac{2}{3}-1}\right)\\ &= -\frac{1}{2v^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{v^{\frac{5}{3}}} = -\frac{1}{2\sqrt{v^3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{v^5}}\end{aligned}$$

Problema 2.2.3 Hallar la derivada de la función:

$$y = \left(1+\sqrt{x}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(1+\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}\left(x-\sqrt{2}\right) + \left(x-\sqrt{2}\right)\frac{d}{dx}\left(1+\sqrt{x}\right)\\ &= \left(1+\sqrt{x}\right)\left(\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2}\right)\right) + \left(x-\sqrt{2}\right)\left(\frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)\right)\\ &= \left(1+\sqrt{x}\right)(1-0) + \left(x-\sqrt{2}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x} + \frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{2\sqrt{x}+2x+x-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+3x-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Problema 2.2.4 Si f, g y h son funciones diferenciables, probar que:

$$(fgh)' = fgh' + fhg' + ghf'$$

Solución

Escribimos $fgh = [fg]h$ y aplicamos la regla del producto:

$$\begin{aligned}(fgh)' = ([fg]h)' = [fg]h' + h[fg]' &= fgh' + h\left(fg' + gf'\right)\\ &= fgh' + fhg' + ghf'\end{aligned}$$

Problema 2.2.5 Si a, b y c son constantes, hallar la derivada de la función:

$$y = (x-a)(x-b)(x-c)$$

Solución

Aplicando el problema anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dx}\left[(x-a)(x-b)(x-c)\right] \\
&= (x-a)(x-b)\frac{d}{dx}(x-c) + (x-a)(x-c)\frac{d}{dx}(x-b) \\
&\qquad + (x-b)(x-c)\frac{d}{dx}(x-a) \\
&= (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c) \\
&= x^2 - (a+b)x + ab + x^2 - (a+c)x + ac + x^2 - (b+c)x + bc \\
&= 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc
\end{aligned}$$

Problema 2.2.6 Hallar la derivada de la función:

$$y = \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$$

Solución

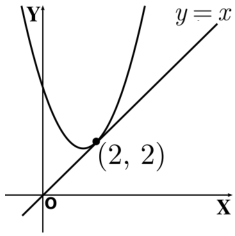
Aplicamos la regla del cociente:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\left(a^2 - x^2\right)\frac{d}{dx}\left(a^2 + x^2\right) - \left(a^2 + x^2\right)\frac{d}{dx}\left(a^2 - x^2\right)}{\left(a^2 - x^2\right)^2} \\
&= \frac{\left(a^2 - x^2\right)(2x) - \left(a^2 + x^2\right)(-2x)}{\left(a^2 - x^2\right)^2} = \frac{2a^2x - 2x^3 + 2a^2x + 2x^3}{\left(a^2 - x^2\right)^2} \\
&= \frac{4a^2x}{\left(a^2 - x^2\right)^2}
\end{aligned}$$

Problema 2.2.7

Hallar la parábola $y = x^2 + bx + c$ que tiene por tangente a la recta $y = x$ en el punto (2, 2).

Solución



Sea $f(x) = x^2 + bx + c$.

La pendiente de la recta $y = x$ es $m = 1$.

Por otro lado, la pendiente de la tangente a la parábola, en el punto (2, 2), es $f'(2)$. En consecuencia, debemos tener que $f'(2) = 1$. Pero:

$$f'(x) = 2x + b \Rightarrow f'(2) = 2(2) + b = 4 + b$$

Luego,

$$4 + b = 1 \Rightarrow b = -3$$

Reemplazando el valor $b = -3$ en la parábola, tenemos: $y = x^2 - 3x + c$.

Ahora hallemos el valor de c. Para esto aprovechamos que el punto (2, 2) está en la parábola; por lo tanto, debe satisfacer su ecuación. Esto es:

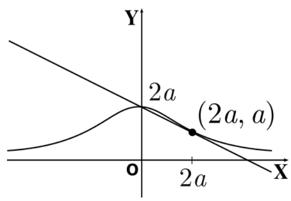
$$2 = (2)^2 - 3(2) + c \Rightarrow c = 4$$

En consecuencia, la parábola buscada es: $y = x^2 - 3x + 4$

Problema 2.2.8

Hallar la recta tangente al gráfico de la función **Bruja de Agnesi** en el punto donde $x = 2a$.

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$



Solución

Encontremos la pendiente de la tangente en el punto donde $x = 2a$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}\right) = \frac{\left(x^2 + 4a^2\right)\frac{d}{dx}\left(8a^3\right) - 8a^3\frac{d}{dx}\left(x^2 + 4a^2\right)}{\left(x^2 + 4a^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2 + 4a^2\right)(0) - 8a^3(2x)}{\left(x^2 + 4a^2\right)^2} = \frac{-16a^3x}{\left(x^2 + 4a^2\right)^2}$$

Ahora, la pendiente de la recta tangente, en el punto donde $x = 2a$, es:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2a} = \frac{-16a^3(2a)}{\left((2a)^2 + 4a^2\right)^2} = \frac{-32a^4}{64a^4} = -\frac{1}{2}$$

Busquemos el punto de tangencia reemplazando $x = 2a$ en la ecuación que define la función:

$$y = \frac{8a^3}{(2a)^2 + 4a^2} = \frac{8a^3}{8a^2} = a$$

Luego, el punto de tangencia es $(2a,\ a)$. Ahora, ya podemos hallar la tangente buscada:

$$y - a = -\frac{1}{2}(x - 2a), \ \text{ es decir, } \ x + 2y - 4a = 0$$

Problema 2.2.9

Hallar los puntos del gráfico de la siguiente función en los cuales la recta tangente pasa por el origen.

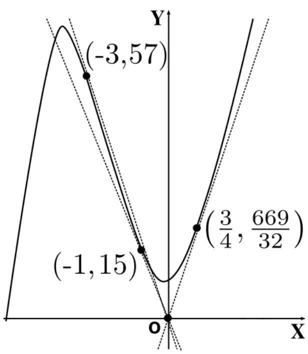
$$f(x) = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$$

Solución

Sea $(a,\ f(a))$ un punto del gráfico tal que la recta tangente en $(a,\ f(a))$ pasa por el origen. En general, la ecuación de la recta tangente es:

$$L:\ y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\Rightarrow L:\ y = f'(a)x + [f(a) - af'(a)]$$



L pasa por el origen si y solo si:

$$[f(a) - af'(a)] = 0 \Leftrightarrow f(a) = af'(a)$$

Pero, $f'(a) = 6a^2 + 26a + 5$. Luego:

$$f(a) = af'(a)$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 + 13a^2 + 5a + 9 = a\left(6a^2 + 26a + 5\right)$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 + 13a^2 - 9 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son -3, -1 y $\frac{3}{4}$. Por lo tanto, los puntos buscados son los siguientes:

$$P_1 = (-3,\ f(-3)) = (-3,\ 57) \qquad P_2 = (-1,\ f(-1)) = (-1,\ 15)$$

$$P_3 = \left(\frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \left(\frac{3}{4},\ \frac{669}{32}\right)$$

Problema 2.2.10 Probar la **Regla del producto** (teorema 2.2.5):

Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son funciones diferenciables en x, entonces $\boldsymbol{fg}$ es diferenciable en x y se cumple que:

$\boldsymbol{(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)}$ o, simplemente, $\boldsymbol{(fg)' = fg' + gf'}$

Solución

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Restando y sumando $f(x+h)g(x)$, al numerador, tenemos:

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) & \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)] + [f(x+h)g(x) - f(x)g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h}\right] \\
&\qquad + \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + \lim_{h\to 0} \left[g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\
&= \left[\lim_{h\to 0} f(x+h)\right] \left[\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\
&\qquad + \left[\lim_{h\to 0} g(x)\right] \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Problema 2.2.11

Si g es una función diferenciable en x, donde $g(x) \neq 0$, probar que:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x) - g(x+h)}{h}\right]
\end{aligned}$$

$$= \left[-\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right]\left[\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$
$$= -\frac{1}{g(x)g(x)}g'(x) = -\frac{g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Problema 2.2.12 Probar la **Regla del cociente** (teorema 2.2.6):

Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son diferenciables en x, donde $\boldsymbol{g(x) \neq 0}$; entonces $\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ es diferenciable en x, y se cumple que:

$$\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}}$$

o, simplemente, $\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}}$

Solución

Tenemos que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$$

Aplicamos la regla del producto y el resultado del problema anterior:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' + \frac{1}{g(x)}f'(x)$$
$$= f(x)\left(-\frac{g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}\right) + \frac{1}{g(x)}f'(x) = \frac{-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{-f(x)g'(x) + g(x)f'(x)}{\left[g(x)\right]^2} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.2

En los problemas del 1 al 38, hallar la derivada de la función dada, donde las expresiones *a*, *b*, *c* y *d* son constantes.

1. $y = 4x^2 - 6x + 1$

2. $y = 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^6}{6}$

3. $y = 0.5x^4 - 0.3x^2 + 2.5x$

4. $u = v^{10} - \dfrac{3v^8}{4} + 0.4v^3 + 0.1$

5. $s = 2t^{-5} + \dfrac{t^3}{3} - 0.3t^{-2}$

6. $z = \dfrac{1}{3y} - \dfrac{3}{y^2} + 2$

7. $f(x) = 3x^{\frac{5}{6}} - 4x^{-\frac{2}{3}} - 10$

8. $g(x) = ax^5 - bx^{-4} + cx^{\frac{3}{2}} + d$

9. $y = -\dfrac{2x^6}{3a}$

10. $z = \dfrac{x^3}{a+b} + \dfrac{x^5}{a-b} - x$

11. $z = \dfrac{t^3 - bt^2 - 3}{6}$

12. $y = 4\sqrt{x} - \dfrac{3}{2x^2} + \sqrt{3}$

13. $z = \sqrt[3]{t} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}$

14. $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{3}$

15. $y = \left(5x^4 - 4x^5\right)\left(3x^2 + 2x^3\right)$

16. $y = x^3 \mathrm{e}^x$

17. $y = \sqrt{x}\mathrm{e}^x$

18. $y = x^{\mathrm{e}} + \mathrm{e}^x$

19. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

20. $y = \dfrac{1}{3}\left(2x^3 - 1\right)\left(3x^2 - 2\right)(6x - 5)$

21. $z = \sqrt{t}\left(t^4 - 1\right)\left(t^6 - 2\right)$

22. $y = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$

23. $u = 2\sqrt{x}\left(x^2 - \sqrt{x} + \sqrt{5}\right)$

24. $y = (\sqrt{x} - 3)\left(\dfrac{2}{x} - 1\right)$

25. $y = \dfrac{3}{x-9}$

26. $y = \dfrac{x}{x-8}$

27. $y = \dfrac{x+3}{x-3}$

28. $z = \dfrac{t}{t^2+1}$

29. $u = \dfrac{2t^3+1}{t-1}$

30. $y = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1}$

31. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x}$

32. $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{x}}$

33. $y = \dfrac{ax^2 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

34. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} - (x-1)\left(x^2 - 1\right)$

35. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

36. $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$ **37.** $y = \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ **38.** $y = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

En los problemas del 39 al 42, hallar la recta tangente al gráfico de la función en el punto indicado.

39. $y = x^4 - 3x^2 + x - 2,\ (1,\,-3)$ **40.** $y = x^2(x-5),\ (2,\,-12)$

41. $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-3},\ (-1,\,\frac{1}{2})$ **42.** $g(x) = \dfrac{x^3}{2a-x},\ (a,\,a^2)$

43. Hallar el punto en la parábola $y = 3x^2 - 2x - 1$ en el cual la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

44. Hallar la recta tangente horizontal a la curva $y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

45. Hallar la recta tangente horizontal a la curva $y = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$.

46. Hallar los puntos del gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{7}{2}$ en los cuales la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

47. Hallar la tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$ que es paralela a la recta: $3x + y - 1 = 0$.

48. Hallar la tangente al gráfico de $g(x) = \sqrt{x} + 2$ que es perpendicular a la recta: $2x + y + 8 = 0$.

49. Hallar la parábola $y = ax^2 + bx$ que tenga a (2, -12) como punto más bajo.

50. Hallar la parábola $y = ax^2 + bx$ que tenga a (4, 16) como punto más alto.

51. Hallar la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $2x + y + 7 = 0$ en el punto (-2, -3).

SECCION 2.3

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema 2.3.1

1. $D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$ **2.** $D_x(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

3. $D_x(\tan x) = \sec^2 x$ **4.** $D_x(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

5. $D_x(\sec x) = \sec x \tan x$ **6.** $D_x(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

Demostración

1. $D_x(\operatorname{sen} x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$

Usando la identidad del seno de una suma, tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x \\ &= \operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} D_x(\operatorname{sen} x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \\ &= \left(\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}\right) + \left(\lim_{h \to 0} \cos x\right)\left(\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) \\ &= (\operatorname{sen} x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x \end{aligned}$$

2. Se procede como en **1** (ver el problema propuesto 12).

3. $$\begin{aligned} D_x(\tan x) = D_x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) &= \frac{\cos x D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x \end{aligned}$$

4. Se prueba igual que **3** (ver el problema propuesto 13).

5. $D_x(\sec x) = D_x\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = \dfrac{(\cos x)D_x(1) - (1)D_x(\cos x)}{\cos^2 x} = \dfrac{0 - (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

6. Se prueba igual que **5** (ver el problema propuesto 14).

Ejemplo 2.3.1 Hallar la derivada de:

a. $f(x) = x^3 \operatorname{sen} x$ **b.** $h(\theta) = \tan\theta - \theta$

Solución

a. $f'(x) = \left(x^3\right)'(\operatorname{sen} x) + \left(x^3\right)(\operatorname{sen} x)' = 3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x$

b. $h'(\theta) = \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ (Iden. Trig. 6)

Ejemplo 2.3.2 Calcular la derivada de:

a. $y = \dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$ **b.** $y = \dfrac{1 - \cot x}{\operatorname{cosec} x}$

Solución

a. $D_\theta(y) = \dfrac{(1 + \tan\theta)D_\theta(1 - \tan\theta) - (1 - \tan\theta)D_\theta(1 + \tan\theta)}{(1 + \tan\theta)^2}$

$$= \frac{(1 + \tan\theta)\left(-\sec^2\theta\right) - (1 - \tan\theta)\left(\sec^2\theta\right)}{(1 + \tan\theta)^2} = -\frac{2\sec^2\theta}{(1 + \tan\theta)^2}$$

b. Método 1.

$$y' = \frac{(\operatorname{cosec} x)D_x(1 - \cot x) - (1 - \cot x)D_x(\operatorname{cosec} x)}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} x)\left(0 - \left(-\operatorname{cosec}^2 x\right)\right) - (1 - \cot x)(-\operatorname{cosec} x \cot x)}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^3 x + \operatorname{cosec} x \cot x - \operatorname{cosec} x \cot^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} x\left(\operatorname{cosec}^2 x + \cot x - \cot^2 x\right)}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \cot x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 + \cot^2 x + \cot x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x}$$

$$= \frac{1 + \cot x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \operatorname{sen} x + \cos x$$

Método 2.

$$y = \frac{1 - \cot x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \operatorname{sen} x - \cos x$$

Luego:

$$y' = D_x(\operatorname{sen} x - \cos x) = D_x(\operatorname{sen} x) - D_x(\cos x) = \cos x + \operatorname{sen} x$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.3

En los problemas del 1 al 9, hallar la derivada de la función dada.

1. $f(x) = 5 \operatorname{sen} x + 2 \cos x$ **2.** $g(\theta) = \theta \cot \theta$ **3.** $y = \tan \alpha \operatorname{sen} \alpha$

4. $y = \tan x - \cot x$ **5.** $h(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t}$ **6.** $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

7. $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ **8.** $y = \dfrac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\operatorname{sen} t - \cos t}$ **9.** $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

10. Si $f(x) = \sec x - 2 \cos x$, hallar:

- **a.** la recta tangente al gráfico de f en el punto $(\frac{\pi}{3}, 1)$.
- **b.** la recta normal al gráfico de f en el punto $(\frac{\pi}{3}, 1)$.

11. Si la recta tangente al gráfico de función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $(a, \operatorname{sen} a)$ pasa por el origen, probar que se cumple que $\tan a = a$.

12. Probar que $D_x \cos x = -\operatorname{sen} x$.

13. Probar que $D_x \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$.

14. Probar que $D_x \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$.

SECCION 2.4

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Teorema 2.4.1

Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas.:

1. $D_x(a^x) = a^x \ln a$

2. $D_x(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ **3.** $D_x(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

Demostración

1. $$D_x(a^x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a \qquad \text{(Teorema 1.8.1, Parte 4)}$$

2. Basta probar 3, ya que 2 sigue de 3, tomando $a = \mathrm{e}$.

3. De acuerdo al teorema 1.8.1 (parte 1), tenemos que:

$$\lim_{h\to 0} (1 + ah)^{\frac{1}{h}} = \mathrm{e}^a$$

Además, el corolario del teorema 4.7.2, de nuestro libro *Precálculo Para Todos* nos dice que:

$$\log_a \mathrm{e} = \frac{1}{\ln a}$$

Ahora:

$$D_x(\log_a x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a\left(1 + \frac{1}{x}h\right) = \lim_{h\to 0} \log_a\left(1 + \frac{1}{x}h\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{1}{x}h\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \log_a\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$$

$$= \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Ejemplo 2.4.1 Hallar la derivada de $y = x^3 e^x + e5^x$

Solución

$$\begin{aligned} D_x y = D_x\left(x^3 e^x + e5^x\right) &= D_x\left(x^3 e^x\right) + D_x\left(e5^x\right) \\ &= x^3 D_x\left(e^x\right) + e^x D_x\left(x^3\right) + eD_x\left(5^x\right) \\ &= x^3 e^x + e^x\left(3x^2\right) + e5^x \ln 5 = x^3 e^x + 3x^2 e^x + (e\ln 5)5^x \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.2 Hallar la derivada de:

1. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **2.** $y = \log_2\left(x^3\right)$

Solución

1. $D_x y = \dfrac{x D_x(\ln x) - \ln x D_x(x)}{x^2} = \dfrac{x\frac{1}{x} - (\ln x)(1)}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

2. $D_x y = D_x\left(\log_2\left(x^3\right)\right) = D_x\left(3\log_2 x\right) = 3\dfrac{1}{x\ln 2} = \dfrac{3}{x\ln 2}$

Ejemplo 2.4.3

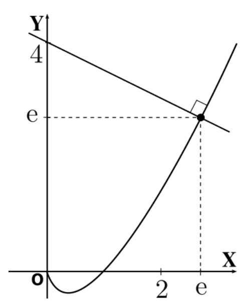
Hallar la recta normal al gráfico de $f(x) = x\ln x$, en el punto $x = e$.

Solución

Tenemos que:

$$f(e) = e\ln e = e(1) = e$$

Por otro lado:



$$f'(x) = x(\ln x)' + (\ln x)(x)' = x\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$
$$\Rightarrow f'(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2$$

La pendiente de la recta normal, en el punto (e, e), es la siguiente:

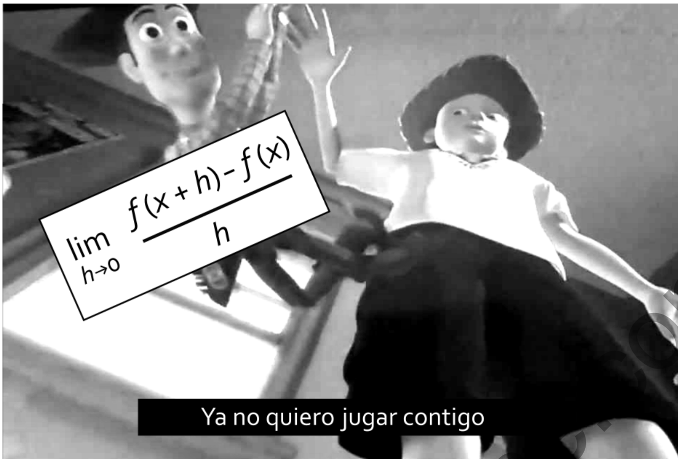
$$m = -\frac{1}{f'(e)} = -\frac{1}{2}$$

Luego, la recta normal en el punto (e, e) es:

$$y - e = -\frac{1}{2}(x - e) \Rightarrow 2y + x - 3e = 0$$

Humor en tiempos de ciencia

Cuando descubres las Técnicas Básicas de Derivación



PROBLEMAS PROPUESTOS 2.4

En los problemas del 1 al 9, hallar la derivada de la función dada.

1. $y = \sqrt{x}\mathrm{e}^x$ **2.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **3.** $y = x^2 2^x$

4. $y = x^2\mathrm{e}^{-x}$ **5.** $y = \mathrm{e}^x \ln x$ **6.** $y = 2^x \log_2 x$

7. $y = \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$ **8.** $y = \dfrac{\log_2 x}{2^x}$ **9.** $y = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

10. Hallar la recta tangente horizontal a la curva $y = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$.

11. Hallar la recta tangente al gráfico de $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ en el punto donde $x = -1$.

12. Hallar la recta tangente al gráfico de $g(x) = \frac{4-x}{\ln x}$ en el punto donde $x = 4$.

SECCION 2.5

REGLA DE LA CADENA

En esta sección estudiaremos diferenciación de funciones compuestas. El resultado que expresa la derivada de una función compuesta, en términos de sus funciones componentes, se denomina *regla de la cadena*.

Muchas de las funciones que vemos con frecuencia se expresan como una composición $y = f(g(x))$; donde $\boldsymbol{f}$ es la función **externa** y $\boldsymbol{g}$ es la **interna**.

Teorema 2.5.1 **Regla de la cadena.**

Si $\boldsymbol{y = f(u)}$ es diferenciable en u, y $\boldsymbol{u = g(x)}$ es diferenciable en x, entonces la función compuesta $\boldsymbol{f \circ g}$ es diferenciable en x, y se cumple que:

$$\boldsymbol{(f \circ g)'(x) = f'\left(g(x)\right) g'(x)}$$

Expresado en palabras, la derivada de una función compuesta es el producto de la derivada de la función externa (derivada externa) por la derivada de la función interna (derivada interna). Con las otras notaciones, la regla de la cadena se expresa así:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g', \qquad D_x y = D_u y D_x u, \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Demostración

Ver el problema resuelto 2.5.11.

Ejemplo 2.5.1 Si $y = \sqrt{x^2 + 3x}$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución

Si hacemos $u = x^2 + 3x$, entonces $y = \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{u}$. Además:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad y \quad \frac{du}{dx} = 2x + 3$$

Luego, por la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x + 3) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$$

Ejemplo 2.5.2 Si $F(x) = \sqrt{g(x)}$, $g(1) = 9$ y $g'(1) = 18$, hallar $F'(1)$.

Solución

Sea $f(u) = \sqrt{u}$. Se tiene que:

$$F(x) = \sqrt{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$F'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \tag{1}$$

$$\text{Pero, } f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \text{por tanto,} \quad f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'(x)$$

En particular, para $x = 1$, tenemos que:

$$F'(1) = \frac{1}{2\sqrt{g(1)}} g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{9}}(18) = \frac{1}{2(3)}(18) = 3$$

TABLA DE DERIVADAS

Al combinar la regla de la cadena con las técnicas de derivación vistas en secciones anteriores obtenemos una nueva lista de derivadas más generales. Si $u = g(x)$ es una función diferenciable de x, entonces:

1. $\dfrac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$ o bien $\dfrac{d}{dx}\left((g(x))^n\right) = n\,(g(x))^{n-1}\dfrac{d}{dx}(g(x))$

2. $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{e}^u) = \mathrm{e}^u\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}(\ln u) = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}(\log_a u) = \dfrac{1}{u\ln a}\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u\dfrac{du}{dx}$

7. $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u\dfrac{du}{dx}$

10. $\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u\dfrac{du}{dx}$

11. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u\dfrac{du}{dx}$

La demostración de estas nuevas formulas es inmediata. Como muestra probaremos la primera. Consideremos la función $f(u) = u^n$, cuya derivada es:

$$\boldsymbol{\frac{d}{du}\left(f(u)\right) = f'(u) = nu^{n-1}}$$

Se tiene que:

$$(g(x))^n = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Ahora, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\left((g(x))^n\right) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = n(g(x))^{n-1}\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$$

Ejemplo 2.5.3 Hallar la derivada de la función:

$$y = \left(x^2 + 5x - 6\right)^3$$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(x^2 + 5x - 6\right)^2 \frac{d}{dx}\left(x^2 + 5x - 6\right) = 3\left(x^2 + 5x - 6\right)^2 (2x + 5)$$

Ejemplo 2.5.4 Hallar la derivada de:

a. $y = \mathrm{e}^{\tan x}$ **b.** $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

Solución

a. $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{\tan x}\right) = \mathrm{e}^{\tan x}\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \mathrm{e}^{\tan x}\left(\sec^2 x\right) = \sec^2 x\,\mathrm{e}^{\tan x}$

b. $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

Ejemplo 2.5.5 Hallar la derivada de:

a. $g(x) = \cos(x^2 + 1)$ **b.** $u = \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha$ **c.** $y = \cot(\operatorname{sen} 3x)$

Solución

a. $g'(x) = -\operatorname{sen}(x^2 + 1)D_x\left(x^2 + 1\right) = -2x\operatorname{sen}\left(x^2 + 1\right)$

b.
$$\begin{aligned} D_\alpha u &= 2(\sec\alpha)D_\alpha(\sec\alpha) + 2(\operatorname{cosec}\alpha)D_\alpha(\operatorname{cosec}\alpha) \\ &= 2(\sec\alpha)(\sec\alpha\tan\alpha) + 2(\operatorname{cosec}\alpha)(-\operatorname{cosec}\alpha\cot\alpha) \\ &= 2\sec^2\alpha\tan\alpha - 2\operatorname{cosec}^2\alpha\cot\alpha \end{aligned}$$

c. $y' = -\operatorname{cosec}^2(\operatorname{sen} 3x) D_x(\operatorname{sen} 3x) = \big(-\operatorname{cosec}^2(\operatorname{sen} 3x)\big)(\cos 3x)(3)$

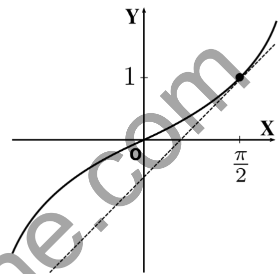
$\quad = -3\cos 3x \operatorname{cosec}^2(\operatorname{sen} 3x)$

Ejemplo 2.5.6

Hallar la recta tangente al gráfico de $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución

Tenemos que:



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Por otro lado:

$$f'(x) = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) D_x\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y - 1 = 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y - x + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$$

Ejemplo 2.5.7 Hallar la derivada de $y = 5^{3x^2-1}$.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(5^{3x^2-1}\right) = \left(5^{3x^2-1}\ln 5\right)\frac{d}{dx}\left(3x^2-1\right) = \left(5^{3x^2-1}\ln 5\right)(6x)$$

$$= 6(\ln 5)x5^{3x^2-1}$$

Ejemplo 2.5.8 Dada la función, $f(x) = \mathrm{e}\ln(\ln x) + 4$, hallar:

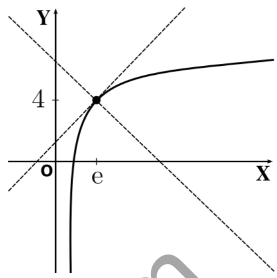
a. la derivada de $f(x)$.

b. la recta tangente y la recta normal al gráfico de la función dada, en el punto donde $x = \mathrm{e}$.

Solución

a. $f'(x) = D_x\left(\mathrm{e}\ln(\ln x) + 4\right) = \mathrm{e}D_x\left(\ln(\ln x)\right)$

$$= \mathrm{e}\frac{1}{\ln x}D_x(\ln x) = \mathrm{e}\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x} = \frac{\mathrm{e}}{x\ln x}$$



b. Tenemos que:

$$f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln(\ln \mathrm{e}) + 4 = \mathrm{e}\ln 1 + 4 = \mathrm{e}(0) + 4 = 4$$

y

$$f'(\mathrm{e}) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}\ln \mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}(1)} = 1$$

Luego,

Recta tangente:

$$y - f(\mathrm{e}) = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) \Rightarrow y - 4 = 1(x - \mathrm{e}) \Rightarrow y - x = 4 - \mathrm{e}$$

Recta normal:

$$y - f(\mathrm{e}) = \left(\frac{-1}{f'(\mathrm{e})}(x - \mathrm{e})\right) \Rightarrow y - 4 = -1(x - \mathrm{e}) \Rightarrow y + x = 4 + \mathrm{e}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 2.5

Problema 2.5.1 Hallar la derivada de la función: $y = \sqrt[3]{x^6 - 3x}$

Solución

Se tiene que:

$$y = \sqrt[3]{x^6 - 3x} = \left(x^6 - 3x\right)^{\frac{1}{3}}$$

Luego,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^6 - 3x\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(x^6 - 3x\right)^{\frac{1}{3}-1}\frac{d}{dx}\left(x^6 - 3x\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^6 - 3x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(6x^5 - 3\right) = \frac{6x^5 - 3}{3\left(x^6 - 3x\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x^5 - 1}{\left(x^6 - 3x\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Problema 2.5.2 Hallar la derivada de la función: $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Solución

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]=\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

$$=\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}(1)-x\left[\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(a^2-x^2\right)\right]}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}(1)-x\left[\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\right]}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x^2\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{a^2-x^2}=\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{x^2}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{\left(a^2-x^2\right)+x^2}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^2-x^2\right)}=\frac{a^2}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Problema 2.5.3 Derivar la función: $u=\sqrt{t+\sqrt{t+1}}$

Solución

$$\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t+\sqrt{t+1}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{t+\sqrt{t+1}}}\frac{d}{dt}\left(t+\sqrt{t+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{t+\sqrt{t+1}}}\left[1+\frac{d}{dt}\sqrt{t+1}\right]=\frac{1}{2\sqrt{t+\sqrt{t+1}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{t+\sqrt{t+1}}}+\frac{1}{4\sqrt{t+1}\sqrt{t+\sqrt{t+1}}}$$

Problema 2.5.4 Hallar la derivada de:

a. $y=\sqrt{1+2\tan x}$ **b.** $y=x-\tan x+\dfrac{1}{3}\tan^3 x$

Solución

a. $$y'=D_x\left[(1+2\tan x)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{2}(1+2\tan x)^{\frac{1}{2}-1}D_x(1+2\tan x)$$

$$=\frac{1}{2}(1+2\tan x)^{-\frac{1}{2}}\left(2\sec^2 x\right)=\frac{\sec^2 x}{(1+2\tan x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}$$

b. $y' = D_x(x) - D_x(\tan x) + D_x\left(\dfrac{1}{3}\tan^3 x\right)$

$$= 1 - \sec^2 x + 3\left(\frac{1}{3}\tan^2 x\right) D_x(\tan x) = 1 - \sec^2 x + \left(\tan^2 x\right)\left(\sec^2 x\right)$$

$$= -\tan^2 x + \left(\tan^2 x\right)\left(1 + \tan^2 x\right) = -\tan^2 x + \tan^2 x + \tan^4 x$$

$$= \tan^4 x$$

Problema 2.5.5 Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y = \operatorname{sen}^2(\cos 3x)$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= D_x\left[\operatorname{sen}^2(\cos 3x)\right] = 2\operatorname{sen}(\cos 3x) D_x\left[\operatorname{sen}(\cos 3x)\right] \\
&= (2\operatorname{sen}(\cos 3x))(\cos(\cos 3x)) D_x\left[\cos 3x\right] \\
&= (2\operatorname{sen}(\cos 3x))(\cos(\cos 3x))(-\operatorname{sen} 3x) D_x[3x] \\
&= (2\operatorname{sen}(\cos 3x))(\cos(\cos 3x))(-\operatorname{sen} 3x)(3) \\
&= (-3\operatorname{sen} 3x)\left[2\operatorname{sen}(\cos 3x)\cos(\cos 3x)\right] \\
&= -3\operatorname{sen} 3x\left[\operatorname{sen}(2\cos 3x)\right] \qquad \text{(iden. Trig. 27)}
\end{aligned}$$

Problema 2.5.6 Hallar la derivada de $y = 2^{3^{x^2}}$

Solución

$$y' = D_x\left(2^{3^{x^2}}\right) = 2^{3^{x^2}}(\ln 2) D_x\left(3^{x^2}\right) = 2^{3^{x^2}}(\ln 2) 3^{x^2}(\ln 3) D_x\left(x^2\right)$$

$$= 2^{3^{x^2}}(\ln 2) 3^{x^2}(\ln 3)(2x) = 2(\ln 2)(\ln 3) x 3^{x^2} 2^{3^{x^2}}$$

Problema 2.5.7 Hallar la derivada de $y = \ln\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

Solución

Se tiene que:

$$y = \ln\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(1) - \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Luego:

$$D_x y = D_x\left(-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) = -\frac{D_x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{1+D_x\left(\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1+\frac{D_x\left(x^2\right)}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = -\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Problema 2.5.8 Hallar:

a. $\boldsymbol{G'(0)}$ si $G(x) = g(a+bx) + g(a-bx)$, y si g es diferenciable en a.

b. $\boldsymbol{F'(0)}$ si $F(x) = f\left(f\left(f(x)\right)\right)$, $f(0) = 0$, y si $f'(0) = -2$.

Solución

a. Sea $f(x) = a + bx$ y $h(x) = a - bx$. Se tiene que:

$$f'(x) = b,\ h'(x) = -b \qquad \text{y} \qquad G(x) = g\left(f(x)\right) + g\left(h(x)\right)$$

Luego, aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left[g\left(f(x)\right) + g\left(h(x)\right)\right]' = \left[g\left(f(x)\right)\right]' + \left[g\left(h(x)\right)\right]' \\ &= g'\left(f(x)\right)f'(x) + g'\left(h(x)\right)h'(x) \end{aligned}$$

En particular, para $x = 0$:

$$G'(0) = g'\left(f(0)\right)f'(0) + g'\left(h(0)\right)h'(0) = g'(a)(b) + g'(a)(-b) = 0$$

b. Sea $g(x) = (f \circ f)(x) = f\left(f(x)\right)$. Se tiene que:

$$F(x) = f\left(f\left((f(x)\right)\right) = f\left(g(x)\right)$$

Aplicando la regla de la cadena a g y a F:

$$g'(x) = f'\left(f(x)\right)f'(x)$$

y

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[f\left(f(f(x))\right)\right]' = \left[f(g(x))\right]' \\ &= f'\left(g(x)\right)g'(x) = f'\left(f(f(x))\right)f'(f(x))f'(x) \end{aligned}$$

En particular, para $x = 0$:

$$\begin{aligned} F'(0) &= f'\left(f(f(0))\right)f'\left(f(0)\right)f'(0) \\ &= f'\left(f(0)\right)f'(0)f'(0) = f'(0)f'(0)f'(0) = (-2)(-2)(-2) = -8 \end{aligned}$$

Problema 2.5.9

Hallar la recta tangente al gráfico de la siguiente función, en el punto que tiene por abscisa $x = -3$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(4+x)^2}}$$

Solución

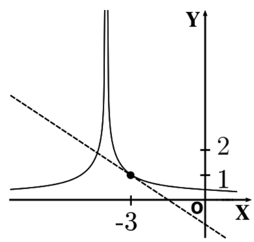
Tenemos que $f(-3) = \frac{1}{\sqrt[3]{(4-3)^2}} = 1$, además:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(4+x)^2}}\right] = \frac{d}{dx}\left[(4+x)^{-\frac{2}{3}}\right] = \frac{-2}{3}(4+x)^{-\frac{5}{3}}\frac{d}{dx}(4+x)$$

$$= -\frac{2}{3}(4+x)^{-\frac{5}{3}}(1) = \frac{-2}{3(4+x)^{\frac{5}{3}}}$$

En particular:

$$f'(-3) = \frac{-2}{3(4-3)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{2}{3(1)} = -\frac{2}{3}$$



Luego, la recta tangente buscada es:

$$y - f(-3) = f'(-3)(x - (-3))$$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}(x+3) \Rightarrow 3y + 2x + 3 = 0$$

Problema 2.5.10 Dada la función $f(x) = 4x^2 e^{-\frac{x^2}{4}}$, hallar:

a. la derivada de la función.

b. los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal.

Solución

a. $f'(x) = D_x\left(4x^2 e^{-\frac{x^2}{4}}\right) = \left(4x^2\right) D_x\left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right) + \left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right) D_x\left(4x^2\right)$

$$= \left(4x^2\right)\left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right) D_x\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right)(8x)$$

$$= \left(4x^2\right)\left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right)\left(-\frac{2x}{4}\right) + \left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right)(8x) = -2x^3 e^{-\frac{x^2}{4}} + 8x e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$= 2x e^{-\frac{x^2}{4}}\left(x^2 - 4\right)$$

b. La recta tangente es horizontal si su pendiente es 0. Luego:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\left(x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0,\ x = -2, \ \text{ o } \ x = 2$$

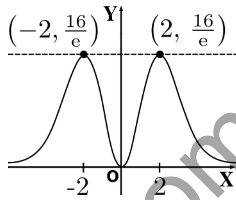
Pero:

$$f(0) = 4(0)^2\mathrm{e}^{-\frac{0^2}{4}} = 0,$$

$$f(-2) = 4(-2)^2\mathrm{e}^{-\frac{(-2)^2}{4}} = \frac{16}{\mathrm{e}}$$

y

$$f(2) = 4(2)^2\mathrm{e}^{-\frac{(2)^2}{4}} = \frac{16}{\mathrm{e}}$$



Luego, los puntos buscados son: $(0, 0)$, $(-2, \frac{16}{\mathrm{e}})$ y $(2, \frac{16}{\mathrm{e}})$.

$\boxed{\textbf{Problema 2.5.11}}$ **Probar la Regla de la cadena.** (teorema 2.5.1)

Si $\boldsymbol{y = f(u)}$ es diferenciable en u, y $\boldsymbol{u = g(x)}$ también lo es en x, entonces la función compuesta $\boldsymbol{f \circ g}$ es diferenciable en x, y se cumple que:

$$\boldsymbol{(f \circ g)'(x) = f'\left(g(x)\right) g'(x)}$$

Solución

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x + h) - (f \circ g)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(g(x + h)\right) - f\left(g(x)\right)}{h}$$

Multiplicando el numerador y denominador por $\Delta g = g(x + h) - g(x)$:

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[f\left(g(x + h)\right) - f\left(g(x)\right)\right]\left[g(x + h) - g(x)\right]}{h\left[g(x + h) - g(x)\right]}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(g(x + h)\right) - f\left(g(x)\right)}{g(x + h) - g(x)} \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(g(x) + \Delta g\right) - f\left(g(x)\right)}{\Delta g} \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

El segundo límite de la expresión anterior es $g'(x)$. En el primer límite, cuando h tiende a 0, la expresión $\Delta g = g(x + h) - g(x)$ también tiende a 0 por ser g continua (teorema 2.1.1); por lo tanto, este primer límite es $f'\left(g(x)\right)$. En consecuencia:

$$(f \circ g)'(x) = f'\left(g(x)\right) g'(x)$$

En la demostración anterior, al dividir entre $\Delta g = g(x+h) - g(x)$, hemos supuesto implícitamente que $\Delta g \neq 0$. Para el caso en el que $\Delta g = 0$, se debe dar una demostración aparte que nosotros omitiremos.

Humor en tiempos de ciencia

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.5

En los problemas del 1 al 61, derivar la función indicada, considerando que las expresiones *a*, *b* y *c* son constantes.

1. $y = \left(x^2 - 3x + 5\right)^3$ **2.** $f(x) = (15 - 8x)^4$ **3.** $g(t) = \left(2t^3 - 1\right)^{-3}$

4. $z = \frac{1}{(5x^5 - x^4)^8}$ **5.** $y = (3x^2 - 8)^3 \left(-4x^2 + 1\right)^4$

6. $f(u) = \dfrac{2u^3 + 1}{u^2 - 1}$ **7.** $y = \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^2$ **8.** $g(t) = \left(\dfrac{3t^2 + 2}{2t^3 - 1}\right)^2$

9. $y = \sqrt{1 - 2x}$ **10.** $u = \sqrt{1 + t - 2t^2 - 8t^3}$

11. $h(x) = x^2\sqrt{x^4 - 1}$ **12.** $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

13. $y = \sqrt{3x^2 - 1}\sqrt[3]{2x + 1}$ **14.** $z = \left(1 - 3x^2\right)^2 \left(\sqrt{x} + 1\right)^{-2}$

15. $h(t) = \dfrac{1 + t}{\sqrt{1 - t}}$ **16.** $z = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1 + t^2}}$

17. $z = \sqrt[3]{b + ax^3}$

18. $f(x) = \dfrac{x}{b^2\sqrt{b^2 + x^2}}$

19. $y = \dfrac{1 - \sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{1+x}}$

20. $f(x) = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$

21. $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

22. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

23. $y = \tan 4x$

24. $y = 2\cot \frac{x}{2}$

25. $u = \cos\left(x^3\right)$

26. $y = \cos^3 x$

27. $y = \tan\left(x^4\right) + \tan^4 x$

28. $z = \cos\sqrt{x}$

29. $u = \sqrt{\cos x}$

30. $y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$

31. $y = \sqrt[3]{\tan 3x}$

32. $y = \cot\sqrt[3]{1 + x^2}$

33. $y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}}$

34. $y = \operatorname{cosec}\frac{1}{x^2}$

35. $y = \operatorname{sen}^3\left[\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right]$

36. $y = \dfrac{\tan x}{\sqrt{\sec^2(x) + 1}}$

37. $y = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$

38. $y = \sqrt{1 + \cot\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

39. $y = \dfrac{\cot(\frac{x}{2})}{\sqrt{1 - \cot^2(\frac{x}{2})}}$

40. $y = \sqrt{a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x}$

41. $y = \cos(\cos x)$

42. $y = \operatorname{sen}\left(\cos x^2\right)$

43. $y = \operatorname{sen}^2(\cos 4x)$

44. $y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\right)$

45. $y = \cos^2(\cos x) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)$

46. $y = \operatorname{sen}\left(\tan\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)$

47. $y = \tan\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$

48. $y = \mathrm{e}^{-3x^2+1}$

49. $y = 2^{\sqrt{x}}$

50. $y = x^n a^{-x^2}$

51. $y = 3^{\cot(\frac{1}{t})}$

52. $y = 2^{3^{\operatorname{sen}^2 x}}$

53. $y = \sqrt{\log_5 x}$

54. $y = \ln\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$

55. $y = \dfrac{\ln t}{\mathrm{e}^{2t}}$

56. $y = \ln\frac{\mathrm{e}^{4x}-1}{\mathrm{e}^{4x}+1}$

57. $y = \mathrm{e}^{x\ln x}$

58. $y = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)$

59. $y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{3}{5}}$

60. $y = \ln\left(x^3\operatorname{sen} x\right)$

61. $y = \ln\cos\frac{x-1}{x}$

62. Si $G(x) = (g(x))^{\frac{2}{3}}$, $g(2) = 125$ y $g'(2) = 150$, hallar $G'(2)$.

63. Si $F(t) = [f(\operatorname{sen} t)]^2$, $f(0) = -3$ y $f'(0) = 5$, hallar $F'(0)$.

64. Dadas $f(u) = \frac{1}{4}u^3 - 3u + 5$ y $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$, hallar la derivada de $f \circ g$ de dos maneras:

a. encontrando $(f \circ g)(x)$ y derivando este resultado.

b. aplicando la regla de la cadena.

En los ejercicios del 65 al 69, hallar $h'(x)$ si:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

65. $f(u) = u^3 - 2u^2 - 5,\ g(x) = 2x - 1$

66. $f(v) = \sqrt{v},\ g(x) = 2x^3 - 4$

67. $f(t) = t^5,\ g(x) = 1 - 2\sqrt{x}$

68. $f(u) = \dfrac{b-u}{b+u},\ g(x) = cx$

69. $f(v) = \dfrac{1}{v},\ g(x) = a\sqrt{a^2 - x^2}$

En los ejercicios del 70 al 73, hallar $\frac{dy}{dx}$.

70. $y = 3u^3 - 4u^4 - 1,\ u = x^2 - 1$

71. $y = v^5,\ v = 3a + 2bx$

72. $y = t^4,\ t = \frac{ax+b}{c}$

73. $y = \frac{1}{\sqrt{v}},\ v = 3x^2 - 1$

En los ejercicios del 74 al 81, hallar la recta tangente y la recta normal al gráfico de la función dada en el punto $(a,\ f(a))$, para el valor indicado de a.

74. $f(x) = (2x^2 - 1)^3,\ a = -1$

75. $f(x) = \dfrac{3}{(2 - x^2)^2},\ a = 0$

76. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{3x+6}},\ a = 1$

77. $f(x) = \sqrt[3]{x-1},\ a = -7$

78. $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(3x-2)^2},\ a = \frac{1}{2}$

79. $f(x) = \cot^2 x,\ a = \frac{\pi}{4}$

80. $f(x) = |\ 1 - x^3\ |,\ a = 2$

81. $f(x) = |\ \operatorname{sen} 5x\ |,\ a = \frac{\pi}{3}$

82. Hallar las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ en los puntos donde el gráfico corta al eje X.

83. Hallar los puntos en la gráfica de $g(x) = x^2(x-4)^2$ en los cuales la recta tangente es paralela al eje X.

84. Hallar las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ en los puntos donde este gráfico corta a los ejes. ¿Qué particularidad tienen estas rectas?.

85. Hallar las rectas tangentes al gráfico de $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ que pasan por el origen.

86. Hallar las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = 3x^2 - \ln x$ en el punto $(1,\ 3)$.

87. Hallar las rectas tangentes al gráfico de $y = \ln(1 + e^x)$ en el punto $(0, \ln 2)$.

88. Sean f y g dos funciones diferenciables tales que $f'(u) = \frac{1}{u}$ y $f(g(x)) = x$. Probar que $g'(x) = g(x)$.

¿Sabías esto?

El Anonymous de la Matemática

El matemático francés, ***Nicolas Bourbaki*** *fue uno de los académicos más influyentes del siglo XX. Sus obras tuvieron impacto en filosofía, humanidades y, por supuesto, en matemáticas. Fue tal su trascendencia en este último, que dio origen al movimiento denominado* ***La Matemática Moderna*** *en los años setenta; un cambio drástico en la enseñanza de la Matemática.*

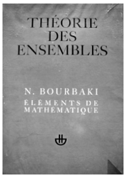
Su nombre comienza escucharse en el mundo científico a finales de los años treinta, cuando la prestigiosa revista Comptes Rendus, de la Academia de Ciencias de París, publicó un trabajo firmado por Nicolás Bourbaki, un prestigioso académico de la ***Academia de Poldavia****.*

Entre 1939 y 1998, Bourbaki publicó más de treinta volúmenes de su obra más reconocida, ***Elementos de Matemáticas****; desde luego, una referencia a la más famosa obra de la antigüedad,* ***Los Elementos de Euclides****.*

La extensión y calidad de sus obras es solo comparable con aquellas de los personajes más brillantes de la ciencia; no obstante, fue una gran sorpresa para la comunidad científica descubrir que tanto Nicolás Bourbaki, como su casa de estudios, La Academia de Poldavia, ***nunca existieron****.*

Nicolás Bourbaki fue un nombre inventado por una sociedad secreta de brillantes jóvenes para publicar sus ideas. Esta fue organizada en 1935 con el objetivo de reconstruir la Matemática de forma rigurosa sobre las bases axiomáticas y la Teoría de Conjuntos.

Estos jóvenes eran franceses egresados de la prestigiosa ***Escuela Normal Superior de París****, entre los que destacan los nombres de André Weil, Henri Cartán, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, Lurent Schwartz, Serge Lang y Alexandre Grothendieck.*



Los primeros ejemplares de estas obras son piezas de colección dentro de la comunidad científica. El autor de este libro es el afortunado propietario de una de estas joyas.

3

OTRAS TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Gottfried Wilhem Leibniz, originario de Leipzig, Alemania, estudió y dictó cátedra en la Universidad de Altdort. Fue un genio altamente polifacético que destacó notablemente en las disciplinas de matemáticas, filosofía, lógica, mecánica, geología, jurisprudencia y diplomacia.

En 1684 se publicaron sus investigaciones sobre lo que sería el *Cálculo Diferencial e Integral*, por lo que es considerado, junto con Newton, como uno de los dos creadores del Cálculo; aunque, puede decirse, que las ideas de Leibniz fueron un poco más claras que las de Newton. La notación que empleó para representar la derivada aún es la predilecta entre los estudiosos del cálculo (notación de Leibniz $\frac{dx}{dy}$).

Inventó una máquina de multiplicar y, a temprana edad, se graduó con la tesis de Arte Combinatoria, donde presentó el método de razonamiento que dio origen a la *Lógica Simbólica*.

Fue embajador de su país natal en París durante el reinado de Luis XIV; posición que le permitió conocer a grandes científicos (como *Huygens*) que reforzaron su interés por la matemática.

En 1712 fue protagonista de un largo e infortunado altercado con Newton, reclamando el crédito por la invención (o *descubrimiento*) del Cálculo, donde se lanzaron acusaciones mutuas de plagio y deshonestidad. Los historiadores zanjaron esta disputa dando mérito a cada uno, ya que cada cual obtuvo sus resultados de forma independiente.

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Durante la vida de Leibniz, en América y en el mundo hispano, sucedieron varios hechos notables. La poetisa mejicana *Sor Inés de la Cruz* (1651-1695) publica sus obras poéticas, influenciadas por el Gongorismo. En 1664, los ingleses, bajo el mando del *Duque de York*, toman Nueva Amsterdam y le cambian el nombre a Nueva York. En 1671, el pirata inglés *Henry Morgan* saquea e incendia la ciudad de Panamá. En 1682, el cuáquero *William Penn* funda Pensilvania. Ese mismo año, el francés *Robert Cavalier de la Salle* llega a la desembocadura del río Misisipi, tomando posesión de la región, y dándole el nombre de *Luisiana* en honor a su rey.

SECCION 3.1

DERIVACIÓN IMPLÍCITA Y TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Consideremos la ecuación $xy - 1 = 0$. En esta ecuación podemos despejar la variable y con relativa facilidad, obteniendo la ecuación $y = \frac{1}{x}$, en la que se define a y como función de x. En otras palabras, la ecuación $g(x, y) = 0$ da lugar a una función $y = f(x)$

En el caso anterior (que es muy frecuente), se dice que $g(x, y) = 0$ define **implícitamente** a y como función de x; mientras que la ecuación de la forma $y = f(x)$ define **explícitamente** a y como función de x.

No toda ecuación $g(x, y) = 0$ determina implícitamente una función real de variable real. Tal es el caso de la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$, que no tiene soluciones reales. Puede suceder también que una misma ecuación dé lugar a más de una función; por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ determina dos funciones:

1. $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ **2.** $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

En las funciones definidas implícitamente surge, con frecuencia, la dificultad de despejar la variable dependiente, por lo que es conveniente disponer de alguna técnica que nos permita encontrar la derivada de estas funciones, sin la necesidad de conocer su forma explícita. Para este fin, contamos con una técnica llamada *diferenciación implícita*, que se resume en la siguiente regla:

Para derivar implícitamente la ecuación, derivar término a término, considerando a la variable dependiente como función de la independiente. Luego, despejar la derivada.

Ejemplo 3.1.1 Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $x^3y - y^7x = 5$.

Solución

Derivamos término a término:

$$\frac{d}{dx}\left(x^3y\right) - \frac{d}{dx}\left(y^7x\right) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$\Rightarrow \left[x^3\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}\left(x^3\right)\right] - \left[y^7\frac{dx}{dx} + x\frac{d}{dx}\left(y^7\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow x^3\frac{dy}{dx} + 3yx^2 - y^7 - 7xy^6\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow x^3\frac{dy}{dx} - 7xy^6\frac{dy}{dx} = y^7 - 3yx^2$$
$$\Rightarrow \left(x^3 - 7xy^6\right)\frac{dy}{dx} = y^7 - 3yx^2$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 3yx^2}{x^3 - 7xy^6}$$

Ejemplo 3.1.2 Si $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, hallar $D_x y$.

Solución

$$D_x\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + D_x\left(\sqrt[3]{y^2}\right) = D_x\left(\sqrt[3]{a^2}\right) \Rightarrow D_x x^{\frac{2}{3}} + D_x y^{\frac{2}{3}} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}D_x y = 0$$
$$\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}D_x y = 0$$
$$\Rightarrow D_x y = \frac{-x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

Ejemplo 3.1.3 Si $\tan xy = \frac{x}{y}$, hallar $D_x y$.

Solución

$$D_x(\tan xy) = D_x\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \sec^2 xy D_x(xy) = \frac{yD_x x - xD_x y}{y^2}$$
$$\Rightarrow \sec^2 xy\,(xD_x y + y) = \frac{y - xD_x y}{y^2}$$
$$\Rightarrow x\sec^2 xy D_x y + y\sec^2 xy = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}D_x y$$
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y^2} + x\sec^2 xy\right)D_x y = \frac{1}{y} - y\sec^2 xy$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y^2}\left(1 + y^2\sec^2 xy\right)D_x y = \frac{1}{y}\left(1 - y^2\sec^2 xy\right)$$
$$\Rightarrow x\left(1 + y^2\sec^2 xy\right)D_x y = y\left(1 - y^2\sec^2 xy\right)$$
$$\Rightarrow D_x y = \frac{y\left(1 - y^2\sec^2 xy\right)}{x\left(1 + y^2\sec^2 xy\right)}$$

Ejemplo 3.1.4 Si $\ln y + \dfrac{x}{y} = c$, hallar $D_x y$.

Solución

$$D_x\left(\ln y + \frac{x}{y}\right) = D_x(c) \Rightarrow D_x(\ln y) + D_x\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}D_x y + \frac{yD_x(x) - xD_x y}{y^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y}D_x y + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}D_x y = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)D_x y = -\frac{1}{y} \Rightarrow \left(\frac{y-x}{y^2}\right)D_x y = -\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow D_x y = -\frac{1}{y}\frac{y^2}{y-x} = \frac{y}{x-y}$$

Ejemplo 3.1.5

Hallar las rectas tangentes a $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ (circunferencia), en los puntos donde la abscisa es $x = 4$.

Solución

Hallemos los puntos en la curva que tienen abscisa $x = 4$. Para esto, sustituimos el valor $x = 4$ en la ecuación de la curva.

$$(4-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 16 \Leftrightarrow y = 3 \quad \text{o} \quad y = -5$$

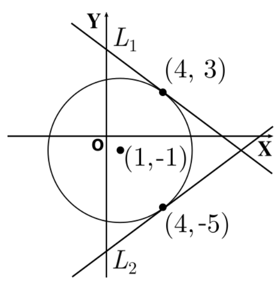
Dos puntos en la curva tienen abscisa $x = 4$: $P_1 = (4,\ 3)$ y $P_2 = (4,\ -5)$.

Luego, La derivada es:

$$\frac{d}{dx}(x-1)^2 + \frac{d}{dx}(y+1)^2 = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + 2(y+1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{y+1}$$



Si m_1 es la pendiente de L_1, la recta tangente en el punto $P_1 = (4,\ 3)$, entonces:

$$m_1 = -\frac{4-1}{3+1} = -\frac{3}{4} \quad \text{y} \quad L_1 : y - 3 = -\frac{3}{4}(x-4)$$

$$\Rightarrow L_1 : 3x + 4y - 24 = 0$$

Si m_2 es la pendiente de L_2, la recta tangente en el punto $P_2 = (4,\, -5)$, entonces:

$$m_2 = -\frac{4-1}{-5+1} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad L_2: \, y+5 = \frac{3}{4}(x-4)$$

$$\Rightarrow L_2: \, 3x - 4y - 32 = 0$$

Ejemplo 3.1.6

Hallar la recta tangente a la curva $ye^{xy} = 2 + x^2$, en el punto donde $x = 0$.

Solución

Hallamos la derivada y' derivando a ambos miembros de la ecuación:

$$(ye^{xy})' = \left(2 + x^2\right)' \Rightarrow y'e^{xy} + y\,(e^{xy})' = 2x$$

$$\Rightarrow y'e^{xy} + y\,(e^{xy}\,(y + xy')) = 2x$$

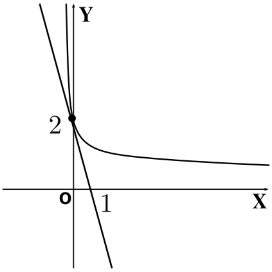
$$\Rightarrow y'e^{xy} + y^2e^{xy} + xyy'e^{xy} = 2x$$

$$\Rightarrow y'\,(e^{xy} + xye^{xy}) = 2x - y^2e^{xy} \Rightarrow y' = \frac{2x - y^2e^{xy}}{e^{xy}(1+xy)}$$

Hallamos la recta tangente reemplazando $x = 0$ en la ecuación de la curva:

$$ye^{(0)y} = 2 + (0)^2 \Rightarrow y = 2$$

Luego, el punto de tangencia es $(0,\, 2)$.



La pendiente m, de la tangente en $(0,\, 2)$, es la derivada en $(0,\, 2)$. Esto es:

$$m = \frac{2(0) - 2^2e^{(0)2}}{e^{(0)2}(1 + 0(2))} = \frac{-4}{1} = -4$$

Entonces, la recta tangente a la curva, en el punto donde $x = 0$, es:

$$y - 2 = -4(x - 0), \qquad \text{o bien,} \qquad y + 4x = 2$$

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Discutiremos brevemente las condiciones que garantizan la existencia y la diferenciabilidad de una función inversa. La demostración que presentamos es parcial. El lector interesado puede hallar la prueba total en el problema resuelto 3.1.7.

Teorema 3.1.1 **Teorema de la Función Inversa.**

Si f es diferenciable en un intervalo abierto I, en el cual f' es continua y no se anula, entonces:

a. f tiene inversa f^{-1} en I.

b. f^{-1} es diferenciable, y para cada x en $f(I)$, se cumple que:

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Con la notación de Leibniz, este teorema dice que:

$$\frac{dx}{dy} = 1 \Big/ \frac{dy}{dx} \quad \text{o bien,} \quad \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = 1$$

Demostración

La demostración que presentamos presupone que la inversa f^{-1} es diferenciable; donde la fórmula enunciada se puede obtener derivando implícitamente.

Por definición de función inversa, tenemos:

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

Derivando la segunda igualdad respecto a x, se obtiene:

$$f'(y)y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{f'(y)} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Ejemplo 3.1.7 Dada la función $f(x) = x^3 + 3x - 2$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$:

a. probar que f tiene inversa en todo su dominio.

b. hallar $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

c. hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1,\ f(1)) = (1,\ 2)$.

d. hallar la tangente al gráfico de f^{-1} en el punto: $\left(2,\ f^{-1}(2)\right) = (2,\ 1)$.

Solución

a. Tenemos que: $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$.

La función derivada $f'(x) = 3x^2 + 3$ es continua y $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Luego, por la parte **a** (teorema anterior), f tiene inversa en $\mathbb{R}$.

b. Se tiene que: $f'(1) = 3(1)^2 + 3 = 6$. Además:

$$f(1) = (1)^3 + 3(1) - 2 = 2 \quad \text{, por lo tanto:} \qquad \left(f^{-1}\right)(2) = 1$$

Luego:

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

c. Recta tangente al gráfico de f en el punto $(1,\, f(1)) = (1,\, 2)$:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - 2 = 6(x-1) \Rightarrow y - 6x = -4$$

d. Recta tangente al gráfico de f^{-1} en el punto $\left(2,\, f^{-1}(2)\right) = (2, 1)$:

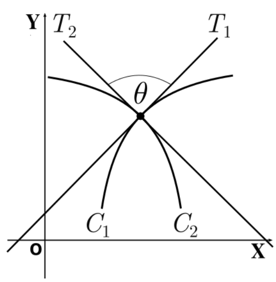
$$y - 1 = \left(f^{-1}\right)'(2)(x-2) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{6}(x-2) \Rightarrow 6y - x = 4$$

ANGULO ENTRE CURVAS

Sean C_1 y C_2 dos curvas que se intersectan en un punto P, y sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a estas curvas en el punto P. Llamaremos ángulos entre C_1 y C_2 a los ángulos suplementarios que forman T_1 y T_2.

Si m_1 y m_2 son las respectivas pendientes de T_1 y T_2, entonces uno de estos dos ángulos es el ángulo θ que cumple:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



Si $\tan\theta \geq 0$, el ángulo es agudo; en cambio, si $\tan\theta < 0$, el ángulo es obtuso.

Se dice que dos curvas se **cortan ortogonalmente** si las rectas tangentes, en el punto de intersección, son perpendiculares. Es decir, si las curvas se cortan formando un ángulo recto.

Ejemplo 3.1.8

Hallar los ángulos que forman C_1 y C_2 en sus puntos de intersección, donde C_1 y C_2 son las circunferencias:

$$C_1: \ x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \quad \text{y} \quad C_2: \ x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$

Solución

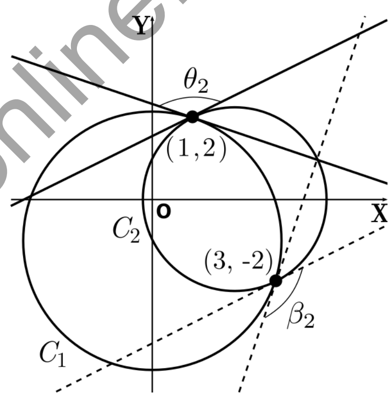
Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las circunferencias, obtenemos que ellas se intersectan en los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, -2)$

En $A = (1, 2)$. Hallamos la derivada y' para ambas ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \Rightarrow 2x + 2yy' + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y+1}$$

En $A = (1, 2)$:

$$y' = -\frac{x}{y+1} = -\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow m_1 = -\frac{1}{3}$$



Por otro lado:

$$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 2x + 2yy' - 4 = 0$$
$$\Rightarrow y' = \frac{2-x}{y}$$

En $A = (1, 2)$:

$$y' = \frac{2-x}{y} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Ahora, si θ_1 es uno de los ángulos en $A = (1, 2)$, entonces:

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$$

Luego, el ángulo agudo es $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$, y el obtuso es $\theta_2 = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

En $B = (3, -2)$.

$$y' = -\frac{x}{y+1} = -\frac{3}{-2+1} = 3 \Rightarrow m_1 = 3, \quad y' = \frac{2-3}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Ahora, si β_1 es uno de los ángulos en $B = (3,\, -2)$, entonces:

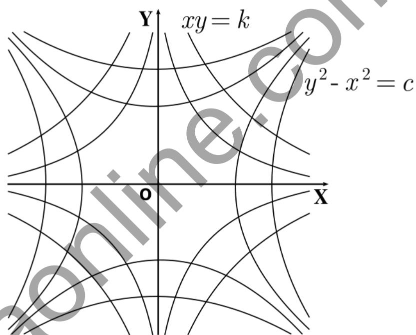
$$\tan\beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{1}{2} - 3}{1 + (3)\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$$

Luego, el ángulo agudo es $\beta_1 = \dfrac{\pi}{4}$, y el obtuso es $\beta_2 = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

Ejemplo 3.1.9

Probar que cada miembro de la familia de hipérbolas $xy = k,\ k \neq 0$ corta ortogonalmente a cada miembro de la familia $y^2 - x^2 = c,\ c \neq 0$ (hipérbolas).

Solución



Tenemos que:

$$xy = k \Rightarrow xy' + y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

Por otro lado:

$$y^2 - x^2 = c \Rightarrow 2yy' - 2x = 0$$
$$\Rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

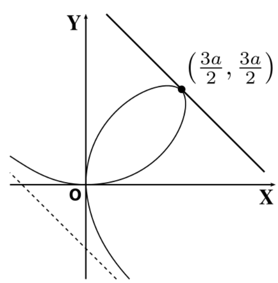
Si $P = (x,\, y)$ es un punto donde se intersecta un miembro de la primera familia con un miembro de la segunda familia, entonces las pendientes en ese punto son $m_1 = -\frac{y}{x}$ y $m_2 = \frac{x}{y}$. Entonces, $m_1 m_2 = \left(-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right) = -1$; por lo tanto, las curvas se cortan *ortogonalmente*.

PROBLEMAS RESUELTOS 3.1

Problema 3.1.1

Hallar la tangente a la *hoja de Descartes* $x^3 + y^3 = 3axy$, en $\left(\frac{3a}{2},\, \frac{3a}{2}\right)$.

Solución



Hallemos $\frac{dy}{dx}$ derivando implícitamente:

$$x^3 + y^3 = 3axy \Rightarrow 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3ay + 3ax\frac{dy}{dx}$$
$$\Rightarrow 3\left(y^2 - ax\right)\frac{dy}{dx} = 3\left(ay - x^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

Ahora, la pendiente en el punto $\left(\frac{3a}{2},\, \frac{3a}{2}\right)$ es:

$$m = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{a\left(\frac{3a}{2}\right) - \left(\frac{3a}{2}\right)^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a\left(\frac{3a}{2}\right)} = \frac{-3a^2}{3a^2} = -1$$

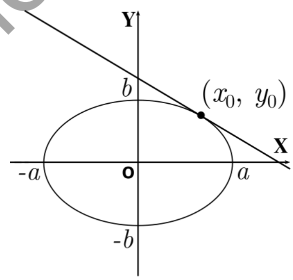
Luego, la recta tangente en el punto dado es:

$$y - \frac{3a}{2} = (-1)\left(x - \frac{3a}{2}\right) \Rightarrow y + x - 3a = 0$$

Problema 3.1.2

Probar que la recta tangente en el punto $(x_0,\, y_0)$ de la elipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ es la recta $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Solución



Multiplicando la ecuación de la elipse por a^2b^2:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

Por ser $(x_0,\, y_0)$ un punto de la elipse:

$$b^2(x_0)^2 + a^2(y_0)^2 = a^2b^2 \qquad (2)$$

Hallemos la pendiente de la tangente derivando implícitamente a **(1)**:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow 2b^2x + 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Luego, la pendiente en el punto $(x_0,\, y_0)$ es:

$$m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

En consecuencia, la recta tangente en el punto $(x_0,\, y_0)$ es:

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0) \Rightarrow a^2y_0y + b^2x_0x = a^2(y_0)^2 + b^2(x_0)^2$$

$$\Rightarrow a^2y_0y + b^2x_0x = a^2b^2 \qquad \text{(por (2))}$$

Finalmente, dividiendo entre a^2b^2:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

Problema 3.1.3 El gráfico de la siguiente ecuación es una elipse rotada:

$$x^2 - xy + y^2 = 4$$

Hallar las rectas tangentes a esta curva en los puntos donde corta al eje X, y demuestre que ambas rectas son paralelas.

Solución

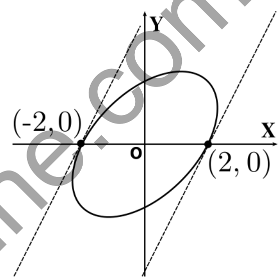
$$y = 0 \Rightarrow x^2 - x(0) + (0)^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, la curva corta al eje X en los puntos (-2, 0) y (2, 0).

Derivando implícitamente la ecuación:

$$2x - xy' - y + 2yy' = 0 \Rightarrow (2y - x)y' = y - 2x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$



La pendiente de la tangente en (-2, 0)

$$m_1 = \frac{0 - 2(-2)}{2(0) - (-2)} = 2,$$

Luego, su ecuación es: $y - 0 = 2(x - (-2)) \Rightarrow y = 2x + 4$

La pendiente de la tangente en (2, 0)

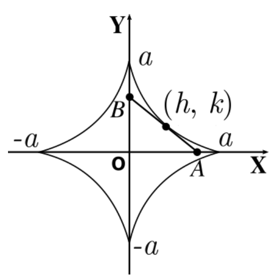
$$m_2 = \frac{0 - 2(2)}{2(0) - 2} = 2, \quad \text{y su ecuación es: } y - 0 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4$$

Observe que las dos tangentes tienen la misma pendiente; por lo tanto, ambas rectas son paralelas.

Problema 3.1.4

Probar que el segmento comprendido entre los dos ejes coordenados de cualquier recta tangente a la *Astroide* $\boldsymbol{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}}$ tiene longitud a.

Solución



Sea $P = (h, k)$ un punto cualquiera de la Astroide, se tiene:

$$h^{\frac{2}{3}} + k^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (1)$$

Paso 1. Hallamos la ecuación de la tangente en el punto $P = (h,\, k)$.

Hallemos la pendiente derivando implícitamente:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

La derivada en el punto $P = (h,\, k)$ nos da la pendiente:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=h} = -\frac{k^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente, teniendo en cuenta (1), es:

$$y - k = -\frac{k^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}(x - h) \Rightarrow y + \frac{k^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}x = h^{\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{3}} + k$$

$$\Rightarrow y + \frac{k^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}x = k^{\frac{1}{3}}\left(h^{\frac{2}{3}} + k^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow y + \frac{k^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}x = k^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} \qquad (2)$$

Paso 2. Hallamos la intersección de la tangente con los ejes coordenados.

Haciendo $x = 0$ en (2), se tiene:

$$y = k^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$$

Luego, la recta tangente corta al eje Y en el punto $A = (0,\, k^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}})$.

Haciendo $y = 0$ en (2), se tiene:

$$\frac{k^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{3}}}x = k^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{k^{\frac{1}{3}}}\left(k^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right) = h^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$$

Luego, la recta tangente corta al eje X en el punto $B = (h^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}},\, 0)$.

Paso 3. Hallamos la longitud del segmento de extremos A y B.

La longitud de este segmento es la distancia $d(A,\, B)$, entre A y B.

$$[d(A,\, B)]^2 = \left(0 - k^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(h^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} - 0\right)^2$$

$$= k^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} + h^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}}\left(k^{\frac{2}{3}} + h^{\frac{2}{3}}\right) = a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}} = a^2$$

Luego, a longitud de este segmento, de extremos A y B, es $d(A,\, B) = a$.

$\boxed{\textbf{Problema 3.1.5}}$ Dada la función $f(x) = 2x + \cos x$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$:

a. probar que tiene inversa.

b. hallar $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

c. hallar la recta tangente al gráfico de f^{-1} en el punto $\left(1,\, f^{-1}(1)\right)$.

Solución

a. Tenemos que:

$$f'(x) = 2 - \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) \geq 2 - 1 = 1 \Rightarrow f'(x) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Luego, por la parte a. del teorema 3.1.1, f tiene inversa en $\mathbb{R}$.

b. Se tiene que:

$$f(0) = 2(0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$$

Luego, por la parte b. del teorema 3.1.1:

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(0)} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

c. La recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto $(1,\, f^{-1}(1)) = (1, 0)$ es:

$$y - f^{-1}(1) = \left(f^{-1}\right)'(1)(x-1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y - x + 1 = 0$$

Problema 3.1.6 Probar que la familia de parábolas:

$$y = ax^2, \tag{1}$$

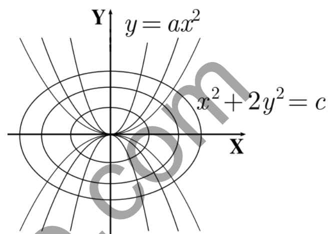
se cortan ortogonalmente con la familia de las elipses:

$$x^2 + 2y^2 = c \tag{2}$$

Solución

$$y = ax^2 \Rightarrow y' = 2ax$$

$$x^2 + 2y^2 = c \Rightarrow 2x + 4yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{2y}$$



Sea $P = (x, y)$ un punto donde se intersecta un miembro de la primera familia con uno de la segunda. Las pendientes en este punto son:

$$m_1 = 2ax \qquad \text{y} \qquad m_2 = -\frac{x}{2y}$$

Teniendo en cuenta que las coordenadas de $P = (x, y)$ satisfacen (1):

$$m_1 m_2 = (2ax)\left(-\frac{x}{2y}\right) = -\frac{ax^2}{y} = -\frac{y}{y} = -1$$

Luego, las familias se cortan ortogonalmente.

Problema 3.1.7 **Probar el teorema 3.1.1** (teor. de la función inversa):

Si f es diferenciable en un intervalo abierto I, en el cual f' es continua y no se anula, entonces:

a. f tiene inversa f^{-1} en I.

b. f^{-1} es diferenciable; y para cada x en $f(I)$, se cumple que:

$$\boldsymbol{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Solución

Parte a. Si f^{-1} es continua y no se anula en I, entonces:

$$f'(z) > 0,\ \forall\, z \in I \qquad \text{o} \qquad f'(z) < 0,\ \forall\, z \in I,$$

ya que, de tomar valores positivos y negativos, por el teorema del valor intermedio (teorema 1.4.6), existiría un c en I tal que $f'(c) = 0$. Pero esto contradice la hipótesis.

Por un resultado simple que veremos más adelante (teorema 4.2.5), en el primer caso, f es creciente en I. En el segundo caso, f es decreciente en I. Sabemos que f es inyectiva en cualquiera de los casos; por lo tanto, f tiene inversa en I.

Parte b. Sean:

- $y = f^{-1}(x)$
- x_0 un elemento cualquiera de $f(I)$
- $y_0 = f^{-1}(x_0)$

Se tiene que:

$$x = f(y), \quad x_0 = f(y_0)$$

Ahora:

$$\left(f^{-1}\right)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

Dado que f es diferenciable en I, f es continua en I; por lo tanto, f^{-1} también es continua.

Por otro lado, por ser f^{-1} continua, se tiene que:

$$x \to x_0 \Leftrightarrow y \to y_0$$

Regresando a (1), tenemos:

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}}$$

$$= \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x_0)\right)}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.1

En los problemas del 1 al 23, hallar $\frac{dy}{dx}$ derivando implícitamente. Las letras *a, b, c, r* y *p* denotan constantes.

1. $3x^2 - 4y = 1$ **2.** $xy - x^2 = 5$ **3.** $y^2 = 4px$

4. $3xy^2 - x^2y^2 = x + 1$ **5.** $\dfrac{1}{x} + y^2 = 2x$ **6.** $x^3 + \dfrac{1}{y} = xy$

7. $(y^2 - 2xy)^2 = 4y - 3$ **8.** $\frac{y}{x-y} - x^3 - 1 = 0$ **9.** $x^2 + y^2 = r^2$

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **11.** $x + 2\sqrt{xy} + y = b$ **12.** $x^2 - 2axy + y^2 = 0$

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$ **14.** $\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} = x$ **15.** $a\cos^2(x+y) = b$

16. $\tan y = xy$ **17.** $\cot(xy) = xy$ **18.** $\cos(x-y) = y \operatorname{sen} x$

19. $y = 1 + xe^y$ **20.** $ye^y = e^{x+1}$ **21.** $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

22. $2y\ln y = x$ **23.** $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$

24. Dada la función $f(x) = 5 - x - x^3$:

- **a.** probar que f tiene inversa en $\mathbb{R}$.
- **b.** hallar $\left(f^{-1}\right)'(3)$.
- **c.** hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1,\ 3)$.
- **d.** hallar la recta tangente al gráfico de f^{-1} en el punto $(3,\ 1)$.

25. Dada la función $g(x) = x^4 + 3x^2 - 2$:

- **a.** probar que g tiene inversa en $(0,\ +\infty)$.
- **b.** hallar $\left(g^{-1}\right)'(2)$.
- **c.** hallar la recta tangente al gráfico de g en el punto $(1,\ 2)$.
- **d.** hallar la recta tangente al gráfico de g^{-1} en el punto $(2,\ 1)$.

26. Dada la función $h(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$:

- **a.** probar que h tiene inversa en $\mathbb{R}$.
- **b.** hallar $\left(h^{-1}\right)'(0)$.
- **c.** hallar la recta tangente al gráfico de h en el punto $(0,\ 0)$.
- **d.** hallar la recta tangente al gráfico de h^{-1} en el punto $(0,\ 0)$.

En los problemas del 27 al 32, hallar la recta tangente a la curva en el punto indicado.

27. $y^2 - 4x - 16 = 0;\ (-3,\ 2)$ **28.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1;\ (-5,\ -\frac{8}{3})$

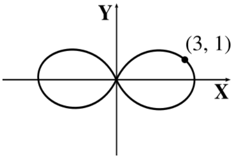
29. $x^2 - x\sqrt{xy} - 2y^2 = 0;\ (-1,\ -1)$ **30.** $y^4 + 6xy = 4x^4;\ (-1,\ 2)$

31. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{3} = 1$; en los puntos donde $x = 3$.

32. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2n} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2n} = 2$; en los puntos donde $x = a$.

33. Hallar la recta tangente a la **Lemniscata de Bernoulli**:

$$2\left(x^2+y^2\right)^2 = 25\left(x^2-y^2\right), \quad \text{en el punto } (3,\, 1).$$



34. Probar que la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ en un punto: $P=(x_0,\, y_0)$ tiene la siguiente ecuación $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$

35. Probar que el segmento de la tangente a la hipérbola $xy=a^2$, limitado por los ejes coordenados, tiene por punto medio el punto de tangencia.

36. Probar que la suma de las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados de una tangente cualquiera a la curva:

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{2}}$$

es igual a b.

En los problemas 37 y 38, hallar el ángulo de intersección de las curvas dadas.

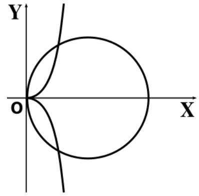
37. $x^2+y^2-4x-1=0,\ x^2+y^2+2y-9=0$ **38.** $y=x^2,\ y=x^3$

39. Probar que la elipse $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ y la hipérbola $x^2-y^2=5$ se cortan ortogonalmente.

40. Probar que la **Cisoide de Diocles**, $(2a-x)y^2=x^3$ y la circunferencia $x^2+y^2=8ax$ se cortan:

a. en el origen, ortogonalmente.

b. en los otros puntos, con un ángulo de 45°.



SECCION 3.2

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Cuando una función de aspecto complicado está compuesta por productos, cocientes, potencias o radicales, podemos simplificar el proceso del cálculo de su derivada empleando un proceso llamado *derivación logarítmica*, que consiste en seguir los siguientes pasos:

1. Tomar logaritmos naturales en ambos miembros y, usando las propiedades logarítmicas, transformar los productos, cocientes y exponentes, en sumas, restas y multiplicaciones, respectivamente.

2. Derivar implícitamente.

3. Despejar la derivada y simplificar.

Ejemplo 3.2.1 Mediante derivación logarítmica, hallar la derivada de:

$$y = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}}$$

Solución

Paso 1. Aplicamos logaritmos y simplificamos:

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}} = 2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2\right)$$

Paso 2. Derivamos implícitamente:

$$D_x \ln y = 2D_x \ln(x+1) - \frac{1}{2}D_x \ln\left(x^2-2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}D_x y = 2\frac{1}{x+1}D_x(x+1) - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-2}D_x\left(x^2-2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}D_x y = 2\frac{1}{x+1}(1) - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-2}(2x) = \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2-2}$$

Paso 3. Despejamos la derivada y simplificamos:

$$D_x y = y\left[\frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2-2}\right] = y\left[\frac{x^2-x-4}{(x+1)\left(x^2-2\right)}\right]$$

$$\Rightarrow D_x y = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}}\left[\frac{x^2-x-4}{(x+1)\left(x^2-2\right)}\right] = \frac{(x+1)\left(x^2-x-4\right)}{\left(x^2-2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

En la práctica los 3 pasos se dan implícitamente, sin necesidad de enunciarlos.

Ejemplo 3.2.2 Hallar la derivada de $y = \left(\dfrac{t}{1+t}\right)^t$

Solución

$$\ln y = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)^t = t\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) = t\ln t - t\ln(1+t)$$

Esto es,

$$\ln y = t\ln t - t\ln(1+t)$$

Derivando respecto a t:

$$\frac{y'}{y} = t\frac{1}{t} + \ln t - \left[t\frac{1}{1+t} + \ln(1+t)\right] = 1 + \ln t - \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$$

$$\Rightarrow y' = y\left(1 - \frac{1}{1+t} + \ln\frac{t}{1+t}\right) = \left(\frac{t}{1+t}\right)^t\left(\frac{t}{1+t} + \ln\frac{t}{1+t}\right)$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.2

Problema 3.2.1 Utilizando derivación logarítmica, hallar la derivada de:

$$y = \frac{\left(x^2-1\right)\left(x^3+2\right)}{\sqrt[3]{x+1}}$$

Solución

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^3+2\right)}{\sqrt[3]{x+1}} = \ln\left[\left(x^2-1\right)\left(x^3+2\right)\right] - \ln\sqrt[3]{x+1} \\ &= \ln\left(x^2-1\right) + \ln\left(x^3+2\right) - \frac{1}{3}\ln(x+1)\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}D_x \ln y &= D_x \ln\left(x^2-1\right) + D_x\ln\left(x^3+2\right) - D_x\frac{1}{3}\ln(x+1) \\ &= \frac{1}{x^2-1}D_x\left(x^2-1\right) + \frac{1}{x^3+2}D_x\left(x^3+2\right) - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}D_x(x+1) \\ &\Rightarrow \frac{1}{y}D_x y = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3(x+1)} \\ &\Rightarrow D_x y = y\left(\frac{2x}{x^2-1} + \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3(x+1)}\right) \\ &\Rightarrow D_x y = \frac{\left(x^2-1\right)\left(x^3+2\right)}{\sqrt[3]{x+1}}\left(\frac{2x}{x^2-1} + \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3(x+1)}\right)\end{aligned}$$

Problema 3.2.2 Mediante derivación logarítmica, hallar la derivada de:

a. $z = x^x,\ x > 0$ **b.** $y = (x)^{x^x} = x^{x^x},\ x > 0$

Solución

a. $z = x^x \Rightarrow \ln z = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \ln z = x \ln x$

Derivamos respecto a x:

$$\frac{z'}{z} = x\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \Rightarrow z' = z(1 + \ln x)$$
$$\Rightarrow z' = x^x(1 + \ln x)$$

b. $y = x^{x^x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{x^x} = x^x \ln x \Rightarrow \ln y = x^x \ln x$

Derivamos respecto a x:

$$\frac{y'}{y} = (x^x)' \ln x + x^x (\ln x)'$$
$$= [x^x(1 + \ln x)] \ln x + x^x \frac{1}{x} \qquad \text{(por la parte } \mathbf{a}\text{)}$$
$$= x^x \left[(1 - \ln x)\ln x + \frac{1}{x}\right] = x^x \left[\ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x}\right]$$
$$\Rightarrow y' = y\left(x^x\left[\ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x}\right]\right) = x^{x^x}\left(x^x\left[\ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x}\right]\right)$$
$$\Rightarrow y' = x^x x^{x^x}\left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right]$$

Problema 3.2.3 Si $x^y = y^x$, hallar $D_x y$.

Solución

Aplicamos logaritmos y luego derivamos implícitamente:

$$x^y = y^x \Rightarrow \ln x^y = \ln y^x \Rightarrow y \ln x = x \ln y$$
$$\Rightarrow y D_x(\ln x) + \ln x D_x y = x D_x(\ln y) + \ln y D_x x$$
$$\Rightarrow y\frac{1}{x} + \ln x D_x y = x\frac{1}{y} D_x y + \ln y$$

$$\Rightarrow \left(\ln x - \frac{x}{y}\right) D_x y = \ln y - \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y \ln x - x}{y}\right) D_x y = \frac{x \ln y - y}{x}$$

$$\Rightarrow D_x y = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.2

Hallar la derivada de las siguientes funciones empleando derivación logarítmica:

1. $y = x^{x^3}$ **2.** $y = x^{\sqrt{x}},\ x > 0$ **3.** $y = x^{\ln x},\ x > 0$

4. $y = (\ln x)^{\ln x}$ **5.** $y = 2^{3^x}$ **6.** $y = a^x x^a$

7. $y = \sqrt[x]{x}$ **8.** $y = \left(x^2 + 1\right)^{\operatorname{sen} x}$ **9.** $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

10. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ **11.** $y = \dfrac{x\left(x^2 - 1\right)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **12.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^2 - 1\right)}{(x + 1)^2}}$

Humor en tiempos de ciencia

$y =$ 😅

$\Rightarrow \ln y =$ 💧 $\ln$ 😄

$\Rightarrow (\ln y)' =$ 💧 $\dfrac{1}{\text{😄}} = \dfrac{\text{💧}}{\text{😄}}$

SECCION 3.3

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Teorema 3.3.1 Si $\boldsymbol{u = u(x)}$ es una función diferenciable de x, entonces:

1. $D_x \operatorname{sen}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$ **2.** $D_x \cos^{-1} u = -\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} D_x u$

3. $D_x \tan^{-1} u = \dfrac{1}{1+u^2} D_x u$ **4.** $D_x \cot^{-1} u = -\dfrac{1}{1+u^2} D_x u$

5. $D_x \sec^{-1} u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$ **6.** $D_x \operatorname{cosec}^{-1} u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$

Demostración

Basta con demostrar las fórmulas del teorema para el caso $u = x$. El caso general se obtiene usando la regla de la cadena.

Sólo probaremos (1), (4) y (5), ya que las otras fórmulas se obtienen en forma análoga (problema propuesto 18).

En vista de que cada función trigonométrica es diferenciable, y su derivada es continua, su correspondiente función inversa es diferenciable.

1. Sea $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. Luego, $\operatorname{sen} y = x$ y $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Derivando $\operatorname{sen} y = x$ respecto a x:

$$D_x \operatorname{sen} y = D_x x \Rightarrow \cos y D_x y = 1 \Rightarrow D_x y = \frac{1}{\cos y} \qquad \textbf{(i)}$$

Pero $\cos y = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$ y $\cos y > 0$ en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Luego, $\cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$.

Reemplazando este valor en **(i)**:

$$D_x y = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow D_x \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Sea $y = \cot^{-1} x$. Luego, $\cot y = x$ y $0 < y < \pi$.

Derivando $\cot y = x$ respecto a x:

$$D_x \cot y = D_x x \Rightarrow -\operatorname{cosec}^2 y D_x y = 1$$

$$\Rightarrow D_x y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

5. Sea $\sec^{-1} x = y$.

Luego, $\sec y = x$, donde $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq y < \frac{3\pi}{2}$

Derivando $\sec y = x$ respecto a x:

$$D_x \sec y = D_x x \Rightarrow \sec y \tan y D_x y = 1$$

$$\Rightarrow D_x y = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{x \tan y} \qquad \textbf{(ii)}$$

Pero $\tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$. Además:

$$\tan y > 0 \quad \text{en} \quad 0 < y < \frac{\pi}{2} \quad \text{o en} \quad \pi < y < \frac{3\pi}{2}$$

Luego:

$$\tan y = \sqrt{x^2-1}$$

Reemplazando este valor en **(ii)**:

$$D_x y = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Ejemplo 3.3.1 Hallar la derivada de:

a. $y = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{x}{2}$ **b.** $y = \tan^{-1} \sqrt{x}$ **c.** $y = \operatorname{cosec}^{-1} e^{3x}$

Solución

a. $y' = D_x\left(\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} D_x\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

b. $y' = D_x\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} D_x\sqrt{x} = \dfrac{1}{1+x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

c. $$y' = D_x\left(\operatorname{cosec}^{-1} \mathrm{e}^{3x}\right) = -\frac{1}{\mathrm{e}^{3x}\sqrt{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 - 1}} D_x\left(\mathrm{e}^{3x}\right)$$
$$= -\frac{1}{\mathrm{e}^{3x}\sqrt{\mathrm{e}^{6x} - 1}}\left(3\mathrm{e}^{3x}\right)$$
$$= -\frac{3}{\sqrt{\mathrm{e}^{6x} - 1}}$$

Ejemplo 3.3.2 Dada la función:

$$f(x) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right),\ 0 \leq x \leq 4,$$

verificar que $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in [0,\, 4]$

Solución

Tenemos que:

$$f'(x) = D_x \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2D_x \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2}} D_x\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}} D_x\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4 - (x-2)^2}}\left(\frac{1}{2}\right) - 2\frac{2}{\sqrt{4-x}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.3

Hallar la derivada de las funciones indicadas en los problemas del 1 al 13.

1. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{9}\right)$

2. $y = \sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

3. $y = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}$

4. $y = \tan^{-1}\left(x^2 + 1\right)$

5. $y = \cot^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

6. $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

7. $y = \sqrt{1-x^2} + x\,\text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

8. $y = \text{sen}^{-1}\sqrt{\text{sen}\, x}$

9. $y = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\right]$

10. $y = \cos^{-1}(\ln x)$

11. $y = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x$

12. $y = \tan\left(\cos^{-1} x\right)$

13. $y = 2\cos^{-1}\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \sqrt{4x - x^2}$

En los problemas 14 y 15, hallar la derivada *y'*.

14. $\tan^{-1}(x+y) = x$

15. $xy = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

16. Hallar la recta tangente a la curva:

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right),$$

en el punto donde $x = 3$.

17. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$y = \cos^{-1}\left[\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right], \quad \text{en el punto donde } x = 0.$$

18. Probar las fórmulas (2), (3) y (6) del teorema 3.3.1.

19. Dada la función:

$$f(x) = \left(\cos^{-1} x + \text{sen}^{-1} x\right)^{n}, \; -1 \leq x \leq 1$$

verificar que $f'(x) = 0$, $\forall\, x$ tal que $-1 \leq x \leq 1$.

20. Dada la función:

$$f(x) = 2\tan^{-1}\sqrt{x} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \quad \text{donde } x \geq 0,$$

verificar que $f'(x) = 0$, $\forall\, x$ tal que $x \geq 0$.

SECCION 3.4

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Al derivar una función f obtenemos la función derivada f' cuyo dominio está contenido en el dominio de f. Podemos volver a derivar a f' obteniendo otra nueva función $(f')'$, cuyo dominio es el conjunto de todos los puntos x del dominio de f' para los cuales f' es derivable en x; es decir, todos los puntos x del dominio de f' para los cuales existe el siguiente límite:

$$(f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

La función $\boldsymbol{(f')'}$ es la **segunda derivada de $\boldsymbol{f}$**, y se denota por $\boldsymbol{f''}$. Si $\boldsymbol{f''(a)}$ existe, diremos que f es dos veces diferenciable en a, y que $\boldsymbol{f''(a)}$ es la segunda derivada de f en a. Esta segunda derivada de $y = f(x)$ también se puede escribir con otras notaciones de la siguientes formas:

$$D_x^2\left(f(x)\right), \quad D_x^2(y), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

En vista de que f'' es la segunda derivada de f, a f' se le asignará el nombre de **primera derivada de $\boldsymbol{f}$**.

Ejemplo 3.4.1

Hallar la primera y segunda derivada las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2$ **b.** $y = x^3 - 7x^2 - 2x + 1$ **c.** $u = \dfrac{1}{t}$

Solución

a. $f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2$

b. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 14x - 2, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x - 14$

c. $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{t^2}, \quad \dfrac{d^2u}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(-t^{-2}\right) = -(-2)t^{-3} = \dfrac{2}{t^3}$

El proceso de derivación de una función f puede prolongarse más allá de la segunda derivada. Así, si derivamos f'', obtenemos la *tercera* derivada de f, que se denota por f'''. Esto es, $f''' = (f'')'$.

Si volvemos a derivar a f''', obtenemos la *cuarta* derivada de f; y así, sucesivamente. A partir de la segunda derivada de una función ya estamos tratando con **derivadas de orden superior**.

Cuando el *orden de derivación* supera las 4 unidades, la notación anterior se torna incómoda. Para eludir esta inconveniencia, podemos reducir el orden de la derivada a un superíndice entre paréntesis, del modo siguiente:

$$f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'',\ f^{(3)} = f''',\ f^{(4)} = f'''',\ \cdots$$

Con las otras notaciones, estas derivadas se escriben así:

$$f' = D_x(f) = \frac{df}{dx}, \qquad f'' = f^{(2)} = D^2_x(f) = \frac{d^2f}{dx^2}$$

$$f''' = f^{(3)} = D^3_x(f) = \frac{d^3f}{dx^2}, \qquad f'''' = f^{(4)} = D^4_x(f) = \frac{d^4f}{dx^4}$$

Ejemplo 3.4.2 Hallar todas las derivadas de la función $f(x) = x^3$

Solución

$$f'(x) = 3x^2, \quad f^{(2)}(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6, \quad f^{(4)}(x) = 0$$

y

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{para } n \geq 4$$

Ejemplo 3.4.3 Hallar las derivadas, hasta de orden 4, de $y = \dfrac{1}{x}$

Solución

1. $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -1x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(-x^{-2}\right) = -(-2)x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$

3. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{x^3}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(2x^{-3}\right) = 2(-3)x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4}$

4. $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-6}{x^4}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(-6x^{-4}\right) = -6(-4)x^{-5} = \dfrac{24}{x^5}$

VELOCIDAD

Ya vimos en secciones anteriores que para precisar el concepto de *velocidad instantánea* hubo que recurrir al límite de velocidad promedio que nos condujo a la derivada. Ahora formalizaremos esta idea en la siguiente definición.

Definición

Si $\boldsymbol{s = f(t)}$ es la función posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta, la velocidad instantánea del objeto, en el instante t, viene dada por la siguiente formula:

$$\boldsymbol{v(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t)}$$

La velocidad es **positiva o negativa** según el sentido en el que el objeto se desplace en la recta numérica. Si la velocidad es 0, el objeto está en reposo.

Ejemplo 3.4.4 La ecuación de un objeto que se mueve sobre una recta es:

$$s = 3t^2 - 8t + 7,$$

donde s se mide en centímetros, y t en segundos.

a. Hallar la velocidad del objeto cuando $t = 1$ y cuando $t = 5$.

b. Hallar la velocidad promedio en el intervalo de tiempo [1, 5].

Solución

a. Tenemos que $v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t - 8$. Luego:

$$v(1) = 6(1) - 8 = -2 \ cm/seg \quad \text{y} \quad v(5) = 6(5) - 8 = 22 \ cm/seg$$

b. La velocidad promedio en el intervalo [1, 5] es:

$$\frac{s(5) - s(1)}{5 - 1} = \frac{42 - 2}{4} = 10 \ cm/seg$$

ACELERACIÓN

Anteriormente obtuvimos la velocidad derivando la función de posición de un objeto en movimiento rectilíneo. Ahora, tomando la función velocidad, podemos calcular la aceleración promedio y la aceleración instantánea.

Definición

Si $\boldsymbol{s = f(t)}$ es la función posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta, la aceleración instantánea, en el instante t, viene dada por:

$$\boldsymbol{a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)}$$

Ejemplo 3.4.5

Si un objeto se desplaza sobre una recta, conforme a la función de posición $s = t^3 - 3t + 1,$ donde s se mide en metros, y t en segundos:

a. ¿en qué instante la velocidad es 0?

b. ¿en qué instante la aceleración es 0?

c. hallar la aceleración en el instante en que la velocidad es 0.

d. ¿cuándo el objeto se mueve hacia delante (a la derecha)?

e. ¿cuándo el objeto se mueve hacia atrás (a la izquierda)?

Solución

Tenemos que:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 3 \qquad \text{y} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t$$

Luego:

a. $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3(t+1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \quad \text{o} \quad t = 1$

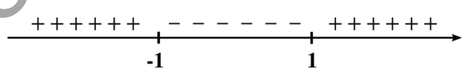
b. $a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Es decir, la aceleración es 0 sólo en el instante $t = 0$.

c. $a(-1) = 6(-1) = -6\ m/seg^2$. $\quad a(1) = 6(1) = 6\ m/seg^2$

d. El movimiento es hacia adelante $\Leftrightarrow v(t) > 0$

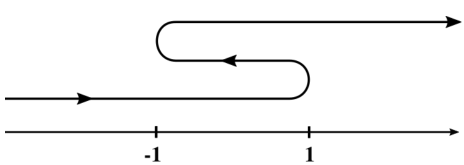
$$\Leftrightarrow 3t^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow 3(t+1)(t-1) > 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty,\, -1) \cup (1,\, +\infty)$$



e. El movimiento es hacia atrás $\Leftrightarrow v(t) < 0$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow 3(t+1)(t-1) < 0 \Leftrightarrow t \in (-1,\, 1)$$

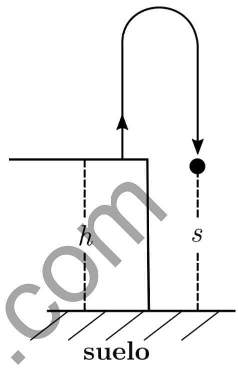
El siguiente dibujo muestra el movimiento del objeto. Advertimos que el objeto se mueve sobre la recta y no sobre la curva superior.



MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE

Un movimiento de caída libre es un movimiento con aceleración constante que corresponde a la aceleración de la gravedad. El valor de esta, a nivel del mar, es $g = 9.8\ m/seg^2$ en el sistema métrico, o $g = 32\ pies/seg^2$ en el inglés.

Supongamos que un cuerpo se lanza verticalmente desde una altura de h metros sobre el nivel del suelo, con una velocidad inicial de $v_0\ m/seg^2$.



Si el sentido positivo es hacia arriba y despreciamos la fricción del aire, entonces, después de t segundos, el objeto se encuentra a una altura de s metros sobre el suelo, donde:

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h = -4.9t^2 + v_0t + h$$

En el caso de que s y la altura h sean dados en pies, y la velocidad v_0 en $pies/seg^2$, la fórmula correspondiente es:

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h = -\frac{1}{2}(32)t^2 + v_0t + h = -16t^2 + v_0t + h$$

Observe que si el objeto se deja caer desde el reposo, es decir, con $v_0 = 0$, entonces la aceleración es $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$.

Ejemplo 3.4.6

Una pelota es lanzada hacia arriba desde el techo de un edificio de 58.8 metros de altura, con una velocidad inicial de $19.6\,m/seg$.

a. ¿Cuándo alcanza su máxima altura la pelota?

b. ¿Cuál esta altura máxima (respecto al suelo)?

c. ¿Cuándo llega al suelo la pelota?

d. ¿Con que velocidad llega al suelo?

Solución

Tenemos que $h = 58.8\,m.$ y $v_0 = 19.6\,m/seg$. Luego:

$$s = -4.9t^2 + 19.6t + 58.8 \qquad \text{y} \qquad v(t) = -9.8t + 19.6$$

a. La pelota alcanza su máxima altura cuando:

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -9.8t + 19.6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{19.6}{9.8} = 2$$

Esto es, después de 2 segundos.

b. La altura máxima es el valor de s cuando $t = 2$. Esto es:

$$s = -4.9(2)^2 + 19.6(2) + 58.8 = 78.4 \text{ metros}$$

c. La pelota llega al suelo cuando $s = 0$. Esto es, cuando:

$$\begin{aligned} -4.9t^2 + 19.6t + 58.8 = 0 &\Rightarrow t^2 - 4t - 12 = 0 \quad \text{(dividiendo entre -4.9)} \\ &\Rightarrow (t-6)(t+2) = 0 \\ &\Rightarrow t = 6 \quad \text{o} \quad t = -2 \end{aligned}$$

La pelota llega al suelo después de 6 segundos. Desechamos $t = -2$ por ser un valor negativo.

d. La velocidad con que llega al suelo es la velocidad cuando t es 6 segundos, es decir:

$$v(6) = -9.8(6) + 19.6 = -39.2 \ m/seg.$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.4

Problema 3.4.1 Hallar las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{1}{ax+b}$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{ax+b}\right) = \frac{d}{dx}(ax+b)^{-1} = -(ax+b)^{-2}\frac{d}{dx}(ax+b) \\ &= -(ax+b)^{-2}(a) = -\frac{a}{(ax+b)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{a}{(ax+b)^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-a(ax+b)^{-2}\right) \\ &= (-2)(-a)(ax+b)^{-3}\frac{d}{dx}(ax+b) = 2a(ax+b)^{-3}(a) = \frac{2a^2}{(ax+b)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2a^2}{(ax+b)^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(2a^2(ax+b)^{-3}\right) \\ &= -3\left(2a^2\right)(ax+b)^{-4}\frac{d}{dx}(ax+b) = -3\left(2a^2\right)(ax+b)^{-4}(a) \\ &= -\frac{6a^3}{(ax+b)^4} \end{aligned}$$

Problema 3.4.2 Probar que la función $y = (x^2 - 1)^2$ satisface la ecuación:

$$\left(x^2 - 1\right) y^{(4)} + 2xy^{(3)} - 6y^{(2)} = 0$$

Solución

En primer lugar, calculamos $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ e $y^{(4)}$.

$$y^{(1)} = \frac{d}{dx}\left(x^2 - 1\right)^2 = 2\left(x^2 - 1\right)(2x) = 4x^3 - 4x$$

$$y^{(2)} = \frac{d}{dx}\left(4x^3 - 4x\right) = 12x^2 - 4 \tag{1}$$

$$y^{(3)} = \frac{d}{dx}\left(12x^2 - 4\right) = 24x \tag{2}$$

$$y^{(4)} = 24 \tag{3}$$

Ahora, reemplazando (1), (2) y (3) en la ecuación dada:

$$\begin{aligned}\left(x^2 - 1\right) y^{(4)} + 2xy^{(3)} - 6y^{(2)} &= \left(x^2 - 1\right)(24) + 2x(24x) - 6\left(12x^2 - 4\right) \\ &= 24x^2 - 24 + 48x^2 - 72x^2 + 24 = 0\end{aligned}$$

Problema 3.4.3 Si $x^2 + y^2 = r^2$, hallar:

a. y' **b.** y'' **c.** y'''

Solución

a. Derivando implícitamente a $x^2 + y^2 = r^2$:

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

b. Derivando implícitamente a $2x + 2yy' = 0$:

$$\begin{aligned}2 + 2\left(y'\right)^2 + 2yy'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1 + \left(y'\right)^2}{y} = -\frac{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}{y} &= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} \\ &= -\frac{r^2}{y^3}\end{aligned}$$

c. Derivando implícitamente a $2 + 2\left(y'\right)^2 + 2yy'' = 0$:

$$4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 0 \Rightarrow 3y'y'' + yy''' = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow y''' = -\frac{3y'y''}{y} &= -\frac{3\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{r^2}{y^3}\right)}{y} \\ &= -\frac{3xr^2}{y^5}\end{aligned}$$

Problema 3.4.4

Probar que la derivada de orden n de la función $\boldsymbol{y = \operatorname{sen} ax}$ es:

$$\boldsymbol{y^{(n)} = a^n \operatorname{sen}\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)}$$

Solución

Usaremos la identidad trigonométrica: $\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$$y^{(1)} = (\operatorname{sen} ax)' = (\cos ax)(ax)' = a \operatorname{sen}\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= \left[a \operatorname{sen}\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \left[a \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)\right]\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)' \\ &= \left[a \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)\right](a) = a^2 \cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)) = a^2 \operatorname{sen}\left(\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a^2 \operatorname{sen}\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(3)} &= \left[a^2 \operatorname{sen}\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right)\right]' = \left[a^2 \cos\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right)\right]\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right)' \\ &= a^2 \cos\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right)(a) = a^3 \cos\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right) \\ &= a^3 \operatorname{sen}\left(\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = a^3 \operatorname{sen}\left(ax + \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Observando las tres primeras derivadas, conjeturamos que se cumple:

$$y^{(n)} = a^n \operatorname{sen}\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \tag{1}$$

Probemos la validez de esta fórmula por inducción; donde bastará con verificar que se cumple para $n + 1$:

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \left[y^{(n)}\right]' = \left[a^n \operatorname{sen}\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)\right]' = \left[a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)\right]\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)' \\ &= \left[a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)\right](a) = a^{n+1} \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= a^{n+1} \operatorname{sen}\left(\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = a^{n+1} \operatorname{sen}\left(ax + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Luego, (1) se cumple para todo n natural.

Problema 3.4.5 Probar que:

$$D_x^n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Solución

$$D_x\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{(1-x)(1)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{2(1)}{(1-x)^2}=\frac{2(1!)}{(1-x)^2}$$

$$D_x^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=D_x\left(\frac{2(1!)}{(1-x)^2}\right)=2D_x\left[(1-x)^{-2}\right]=2(-2)(1-x)^{-3}(-1)$$

$$=\frac{2(2)}{(1-x)^3}=\frac{2(2!)}{(1-x)^3}$$

$$D_x^3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=D_x\frac{2(2!)}{(1-x)^3}=2(2!)D_x\left[(1-x)^{-3}\right]=2(2!)(-3)(1-x)^{-4}(-1)$$

$$=\frac{2(2!)(3)}{(1-x)^4}=\frac{2(3!)}{(1-x)^4}$$

Observando las tres primeras derivadas, conjeturamos que se cumple:

$$D_x^n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}} \tag{1}$$

Probemos la validez de esta fórmula por inducción; donde bastará con verificar que se cumple para $n+1$:

$$D_x^{n+1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=D_x\left[D_x^n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]=D_x\left[\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}\right]$$

$$=2n!D_x(1-x)^{-(n+1)}=2n!\left(-(n+1)\right)(1-x)^{-(n+1)-1}(-1)$$

$$=\frac{2(n+1)n!}{(1-x)^{n+2}}=\frac{2(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Luego, (1) se cumple para todo n natural.

Problema 3.4.6

Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ tienen derivadas de segundo orden, probar que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

Solución

Volvemos aplicar la misma regla a la igualdad de la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\right) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dy}{du}\left(\frac{d}{dx}\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2} \\ &= \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}\end{aligned}$$

Problema 3.4.7

Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ tienen derivadas de tercer orden, probar que:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2y}{du^2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3}$$

Solución

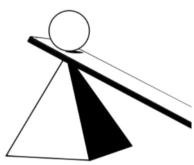
Volvemos aplicar la regla de la cadena a la igualdad del problema anterior:

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}\right) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{du^2}\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right) \\ &\qquad + \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3} \\ &= \left(\frac{d^3y}{du^3}\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{du^2}\left(2\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}\right) \\ &\qquad + \left(\frac{d^2y}{du^2}\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3}\end{aligned}$$

$$= \frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2y}{du^2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{du}\frac{d^3u}{dx^3}$$

¿Sabías esto?

En el siglo XVI se mantenía vigente la teoría Aristotélica que definía la velocidad de los objetos en caída libre como una constante; sin embargo, ***Galileo Galilei*** *(1564-1642) se encargó de demostrar su falsedad. Una tarea difícil, ya que, para la época, no existían dispositivos de medición con la precisión suficiente para medir el tiempo y la distancia recorrida de un objeto en caída libre.*



Galileo logró reducir la velocidad de caída de varias pelotas de bronce con una rampa inclinada en distintos ángulos, registrando los tiempos con un reloj de agua (con una válvula); concluyendo que la distancia recorrida aumentaba de forma proporcional al cuadrado del tiempo. Esto fue el preludio a la Ley de Gravitación Universal de Newton.

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.4

En los problemas del 1 al 6, hallar y''.

1. $y = \sqrt{b^2 - x^2}$ **2.** $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$ **3.** $y = \left(1 + x^2\right)\tan^{-1} x$

4. $y = \sqrt{1 - x^2}\operatorname{sen}^{-1} x$ **5.** $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ **6.** $y = \left(\operatorname{sen}^{-1} x\right)^2$

En los problemas del 7 al 14, hallar las derivadas de segundo y tercer orden.

7. $y = x^5 - 4x^3 - 2x + 2$ **8.** $z = \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^2$

9. $f(x) = (x - 1)^4$ **10.** $g(x) = \left(x^2 + 1\right)^3$ **11.** $y = \sqrt{x}$

12. $h(x) = \dfrac{x}{2 + x}$ **13.** $y = x \operatorname{sen} x$ **14.** $y = x^3\mathrm{e}^{2x}$

En los problemas del 15 al 20, hallar y''.

15. $xy = 1$ **16.** $y^2 = 4ax$

17. $x^3 + y^3 = 1$ **18.** $x^2 = y^3$

19. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ **20.** $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, a y b son constantes.

21. Probar que la función $y=x^4+x^3$, satisface la ecuación:

$$2xy'-x^2y''=-4x^4$$

22. Probar que la función $y=\frac{1}{2}\left(x^2+2x+2\right)$ satisface la ecuación:

$$2yy''-2y'=x^2$$

23. Probar que la función $y=\frac{x^4}{4}-\frac{a}{x}+b$, donde a y b son constantes, satisface la ecuación:

$$\frac{1}{6}x^4y'''-x^3y''+2x^2y'=5a$$

En los problemas del 24 al 38, hallar la derivada de orden n de la función dada.

24. $y=x^n$ **25.** $y=x^{n-1}$ **26.** $y=x^{n+1}$

27. $y=ax^n$ **28.** $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$

29. $y=(ax+b)^n$ **30.** $y=\dfrac{1}{x}$ **31.** $y=\dfrac{1}{1-x}$ **32.** $y=\dfrac{1}{x-a}$

33. $y=\cos ax$ **34.** $y=\operatorname{sen}^2 x$ **35.** $y=\mathrm{e}^{ax}$ **36.** $y=x\mathrm{e}^x$

37. $y=x\ln x$ **38.** $y=\ln(1+x)$

En los problemas del 39 al 42, hallar y'' para los valores indicados.

39. $y=\left(2-x^2\right)^4$; $x=1$ **40.** $y=x\sqrt{x^2+3}$; $x=-1$

41. $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x=1$ **42.** $x^2+2y^2=6$; $x=2$, $y=1$

En los problemas 43 y 44 se da la función de posición, con las unidades en metros y segundos. Responder las siguientes preguntas:

a. ¿En qué instantes la velocidad es 0?

b. ¿En qué instantes la aceleración es 0?

c. ¿Cuándo el objeto se mueve a la derecha?

d. ¿Cuándo el objeto se mueve a la izquierda?

43. $s=t^3-3t^2-24t+8$ **44.** $s=t^2+\dfrac{54}{t}$

En los problemas 45 y 46 se da la función de posición, con las unidades en metros y segundos. Hallar la aceleración en los puntos donde la velocidad es nula.

45. $s = \dfrac{5+t^2}{2+t}$ **46.** $s = \sqrt{2t} + \dfrac{1}{\sqrt{2t}}$

47. Un objeto se mueve en línea recta de acuerdo a la función:

$$s = t^3 - 3t^2 - 24t + 8$$

Hallar su velocidad en los instantes donde la aceleración es nula.

48. Una roca es lanzada hacia arriba desde la parte superior de una torre. La posición de la roca después de t segundos es:

$$s = -16t^2 + 48t + 160 \ \text{ pies}$$

a. ¿Cuál es la altura de la torre?.

b. ¿Cuál es la velocidad inicial de la roca?.

c. ¿Cuándo alcanza la altura máxima?.

d. ¿Cuándo alcanza el suelo?.

e. ¿A qué velocidad alcanza el suelo?.

49. Si un proyectil es disparado desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0, entonces la altura del proyectil, después de t segundos, está dada por:

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

a. Probar que el proyectil alcanza su máxima altura cuando $t = v_0/g$.

b. Probar que la altura máxima es $s = \frac{{v_0}^2}{2g}$.

50. ¿Con qué velocidad inicial v_0 debe dispararse un proyectil desde el suelo verticalmente hacia arriba para que alcance una altura máxima de 705.6 metros? *Sugerencia: Ver el problema 49.*

51. Una piedra es arrojada verticalmente hacia abajo en dirección al mar, desde lo alto de un acantilado, con una velocidad inicial v_0. Si el sentido positivo es hacia abajo, la posición de la roca después de t segundos es $s = 4.9t^2 + v_0 t$ metros. La roca llega al agua después de 4 segundos y con una velocidad de 58.8 m/seg. Hallar la altura del acantilado.

52. Desde lo alto de un acantilado se dejan caer dos rocas (velocidad inicial nula) una tras otra con 3 segundos de diferencia. Probar que las rocas se alejan con una velocidad de 3 metros por segundo.

SECCION 3.5

FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y SUS INVERSAS

Las *funciones hiperbólicas* tienen cierta semejanza con las trigonométricas; sin embargo, estas están definidas en la hipérbola $\boldsymbol{x^2 - y^2 = 1}$, a diferencia de las trigonométricas que se definen en un círculo. No obstante, las funciones hiperbólicas también tienen un vinculo estrecho con la función exponencial; de hecho, estas se definen en términos de la función exponencial.

Al igual que las funciones trigonométricas ordinarias, las funciones hiperbólicas son seis:

1. seno hiperbólico (senh) **2.** coseno hiperbólico (cosh)

3. tangente hiperbólica (tanh) **4.** cotangente hiperbólica (coth)

5. secante hiperbólica (sech) **6.** cosecante hiperbólica (cosech)

Definición

1. $\mathbf{senh}\, \boldsymbol{x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **2.** $\mathbf{cosh}\, \boldsymbol{x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

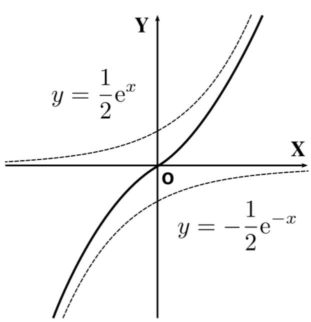
3. $\mathbf{tanh}\, \boldsymbol{x} = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **4.** $\mathbf{coth}\, \boldsymbol{x} = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

5. $\mathbf{sech}\, \boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\cosh x}$ **6.** $\mathbf{cosech}\, \boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

Los dominios, rangos y gráficos de estas funciones son los siguientes:

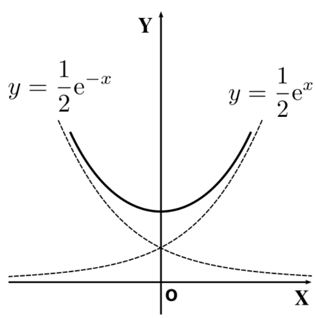
$\boldsymbol{y = \mathbf{senh}\, x}$

Dom. $= \mathbb{R}$, Rang. $= \mathbb{R}$



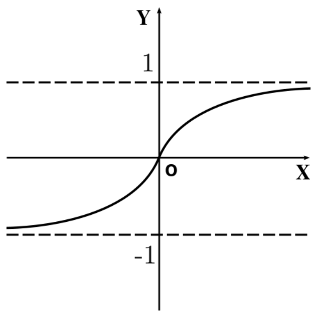
$\boldsymbol{y = \mathbf{cosh}\, x}$

Dom. $= \mathbb{R}$, Rang. $= [1, +\infty)$



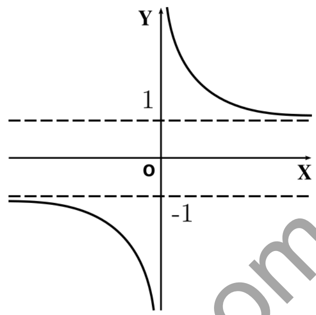
$$\boldsymbol{y = \tanh x}$$

Dom. $= \mathbb{R}$, Rang. $= (-1,\ 1)$



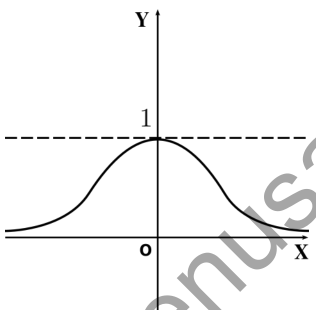
$$\boldsymbol{y = \coth x}$$

Dom. $= \mathbb{R} - \{0\}$, Rang. $= \mathbb{R} - [-1,\ 1]$



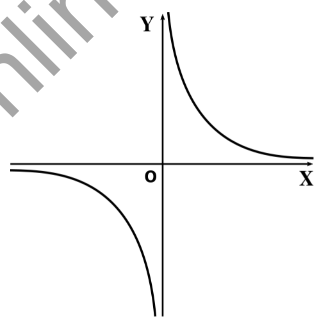
$$\boldsymbol{y = \operatorname{sech} x}$$

Dom. $= \mathbb{R}$, Rang. $= (0,\ 1]$



$$\boldsymbol{y = \operatorname{cosech} x}$$

Dom. $= \mathbb{R} - \{0\}$, Rang. $= \mathbb{R} - \{0\}$

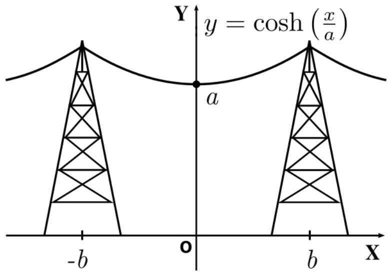


Una curva muy famosa es la **catenaria** (de *catena*, palabra latina que significa cadena) que corresponde a la curva que forma un cable flexible suspendido de dos puntos a la misma altura. Esta curva es descrita mediante el coseno hiperbólico:

$$\boldsymbol{y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)}$$

El arco Gateway de St. Louis, Missouri, es una de las estructuras más notables y elegantes de los Estados Unidos. Fue Construido en el año 1965, y da la falsa impresión de ser un arco más alto que ancho con forma de parábola, cuando realmente es una catenaria al revés de acero inoxidable hueco que mide 630 pies, tanto de alto como de ancho. Este arco es 75 pies más alto que el monumento a Washington y 175 pies más alto que la Estatua de la Libertad. Su ecuación es la siguiente:

$$\boldsymbol{y = 693.86 - (68.767)\cosh\left(\frac{3x}{299}\right)}$$



La Catenaria

Arco Gateway
San Luís, Missouri

Las identidades que veremos a continuación son evidencia de que las funciones hiperbólicas poseen propiedades muy similares a aquellas que exhiben funciones trigonométricas.

IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

Teorema 3.5.1 Se cumple que:

1. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

2. $\cosh(-x) = \cosh x$

3. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

4. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

5. $1 - \coth^2 x =$ -$\operatorname{cosech}^2 x$

6. $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

7. $\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

8. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

9. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

10. $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh(2x) - 1}{2}$

11. $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh(2x) + 1}{2}$

Demostración

Estas igualdades siguen inmediatamente de la definición de las funciones hiperbólicas. Aquí, sólo probaremos 3, 4 y 10. La igualdad 6 la probamos en el problema resuelto 3.5.3, mientras que las demás se dejan como ejercicio al lector.

3.
$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1
\end{aligned}$$

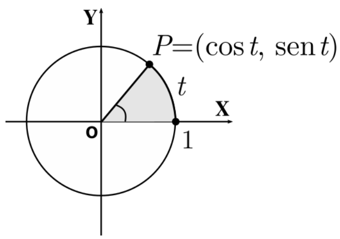
4. En 3, si dividimos entre $\cosh^2 x$, obtenemos:

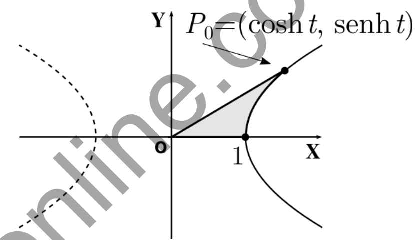
$$\frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \Rightarrow 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

10. De la identidad 3, obtenemos $\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x$. Reemplazando este valor de $\cosh^2 x$ en 9:

$$\cosh(2x) = 1 + 2\operatorname{senh}^2 x \Rightarrow \operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

La identidad 3 nos permite comparar las funciones trigonométricas con las hiperbólicas. Tomamos la circunferencia (círculo trigonométrico) $x^2 + y^2 = 1$, la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, y un número real $t > 0$.





El punto $\boldsymbol{P = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)}$ se encuentra sobre el círculo trigonométrico, ya que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. En este caso, $\boldsymbol{t}$ puede interpretarse como la medida en radianes del ángulo $\angle P$OX.

Por otro lado, el punto $\boldsymbol{P_0 = (\cosh t,\ \operatorname{senh} t)}$ está sobre la hipérbola, ya que, de acuerdo a la identidad 3, $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$. En este caso, t no representa ningún ángulo; sin embargo, existe una propiedad común para t en ambos casos:

El área del sector circular determinado por t,
en el círculo trigonométrico, es igual al área de la
región sombreada en la figura de la hipérbola.

Esta área común es $A = \frac{t}{2}$. Este resultado lo demostramos en nuestro libro *Cálculo Integral para Ciencias e Ingeniería.*

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Teorema 3.5.2 Si $\boldsymbol{u = u(x)}$ es una función diferenciable de x, entonces:

1. $D_x \operatorname{senh} u = \cosh u D_x u$ **2.** $D_x \cosh u = \operatorname{senh} u D_x u$

3. $D_x \tanh u = \operatorname{sech}^2 u D_x u$ **4.** $D_x \coth u = -\operatorname{cosech}^2 u D_x u$

5. D_x sech $u = -$sech $u \tanh u D_x u$ **6.** D_x cosech $u = -$cosech $u \coth u D_x u$

Demostración

Probamos sólo 1 y 3. Las otras se prueban en forma análoga.

1. $$D_x \operatorname{senh} x = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{D_x e^x - D_x e^{-x}}{2} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2}$$
$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

2. $$D_x \tanh x = D_x \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{\cosh x D_x \operatorname{senh} x - \operatorname{senh} x D_x \cosh x}{\cosh^2 x}$$
$$= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \ \operatorname{sech}^2 x$$

Ejemplo 3.5.1 Si $y = \ln \tanh 2x$, hallar $D_x y$.

Solución

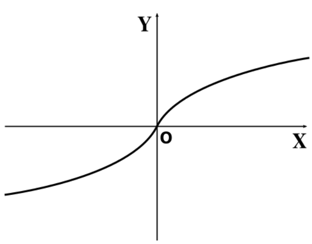
$$D_x y = D_x(\ln \tanh 2x) = \frac{D_x \tanh 2x}{\tanh 2x} = \frac{\operatorname{sech}^2 2x\, D_x 2x}{\tanh 2x} = \frac{2\operatorname{sech}^2 2x}{\tanh 2x}$$
$$= 2\operatorname{sech}^2 2x \frac{1}{\tanh 2x} = 2\frac{1}{\cosh^2 2x}\frac{\cosh 2x}{\operatorname{senh} 2x} = 2\frac{1}{\operatorname{senh} 2x \cosh 2x}$$
$$= \frac{2}{\frac{1}{2}\operatorname{senh} 4x} = \frac{4}{\operatorname{senh} 4x} = 4\operatorname{cosech}\ 4x$$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

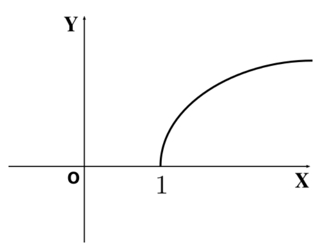
Basta con ver las gráficas de las funciones hiperbólicas para deducir que cuatro de ellas son inyectivas. Las no inyectivas son $y = \cosh x$ e $y = \operatorname{sech}\ x$.

Podemos restringir los dominios de estas dos funciones a $[0, +\infty)$ para lograr inyectividad; de este modo obtendremos las funciones inversas de las seis funciones hiperbólicas, cuyas gráficas son las siguientes:

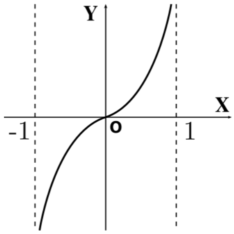
senh^{-1} : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



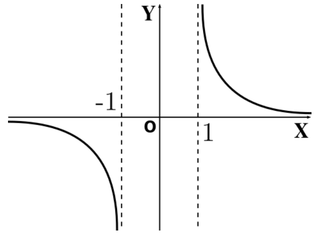
cosh^{-1} : $[1, +\infty) \to [0, +\infty)$



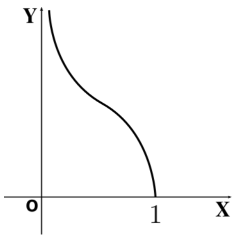
$\mathbf{tanh^{-1}} : (-1,\, 1) \to \mathbb{R}$



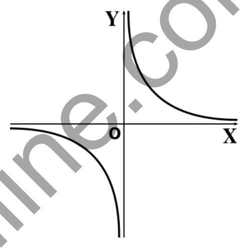
$\mathbf{coth^{-1}} : (-\infty,\, -1) \cup (1,\, +\infty) \to \mathbb{R} - \{0\}$



$\mathbf{sech^{-1}} : (0,\, 1] \to [0,\, +\infty)$



$\mathbf{cosech^{-1}} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$



El siguiente teorema nos presenta a las funciones hiperbólicas inversas en términos de la función logaritmo natural.

$\boxed{\textbf{Teorema 3.5.3}}$

1. $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ **2.** $\coth^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ x \geq 1$

3. $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x},\ \mid x \mid < 1$ **4.** $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1},\ \mid x \mid > 1$

5. $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x},\ 0 < x \leq 1$

6. $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\mid x \mid}\right),\ x \neq 0$

Demostración

Ver el problema resuelto 3.5.4.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Teorema 3.5.4 Si $\boldsymbol{u = u(x)}$ es una función diferenciable de x, entonces:

1. $D_x \operatorname{senh}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} D_x u$

2. $D_x \cosh^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u \qquad (u > 1)$

3. $D_x \tanh^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^2} D_x u \qquad \left(u^2 < 1\right)$

4. $D_x \coth^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^2} D_x u \qquad \left(u^2 > 1\right)$

5. $D_x \operatorname{sech}^{-1} u = -\dfrac{1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u \qquad (0 < u < 1)$

6. $D_x \operatorname{cosech}^{-1} u = -\dfrac{1}{\mid u \mid \sqrt{1+u^2}} D_x u \qquad (u \neq 0)$

Demostración

Probaremos sólo 1, las otras se dejan como ejercicio para el lector.

1. Lo haremos de 2 formas:

Método 1

Si $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, entonces $x = \operatorname{senh} y$.

Derivamos implícitamente a esta última igualdad respecto a x:

$$D_x x = D_x \operatorname{senh} y \Rightarrow 1 = \cosh y D_x y \Rightarrow D_x y = \frac{1}{\cosh y}$$

$$\Rightarrow D_x \operatorname{senh}^{-1} x = \frac{1}{\cosh y} \qquad \text{(a)}$$

Por otro lado, de la identidad $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, y de $\cosh y \geq 0$, obtenemos:

$$\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$$

Reemplazando este valor en (a), obtenemos lo deseado:

$$D_x \operatorname{senh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Método 2

De acuerdo a la igualdad 1 del teorema 3.5.3:

$$D_x \operatorname{senh}^{-1} x = D_x \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} D_x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejemplo 3.5.2 Si $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos x)$, hallar $D_x y$.

Solución

$$D_x y = D_x \operatorname{sech}^{-1}(\cos x) = -\frac{1}{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}} D_x \cos x$$

$$= -\frac{1}{\cos x\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}(-\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.5

Problema 3.5.1 Hallar la derivada de:

a. $y = \tanh^{-1}(\tan x)$ **b.** $y = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\coth^{-1} x + \frac{x}{2}$

Solución

a. $$D_x y = \frac{1}{1-\tan^2 x}\sec^2 x = \frac{1}{1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x$$

b. $$D_x y = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\frac{1}{1-x^2} + x\coth^{-1} x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + x\coth^{-1} x + \frac{1}{2}$$

$$= x\coth^{-1} x$$

Problema 3.5.2

Una línea eléctrica se sostiene sobre dos postes que están a 30 m. de distancia entre si, y el cable toma la forma de la siguiente catenaria:

$$f(x) = 25\cosh\left(\frac{x}{25}\right) - 13$$

Hallar:

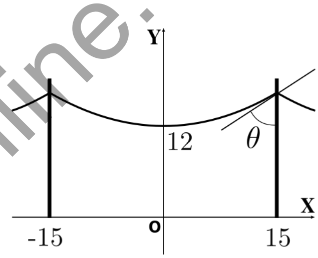
a. la pendiente de la curva en el punto donde la línea eléctrica se encuentra con el poste derecho.

b. el ángulo θ que forma la línea eléctrica con el poste.

Solución

a. Se tiene que:

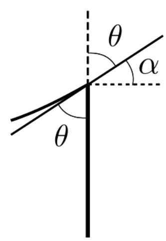
$$f'(x) = 25\,\mathrm{senh}\left(\frac{x}{25}\right)\frac{1}{25} = \mathrm{senh}\left(\frac{x}{25}\right)$$



La pendiente en el punto indicado es:

$$m = f'(15) = \mathrm{senh}\left(\frac{15}{25}\right)$$
$$= \mathrm{senh}(0.6) = \frac{\mathrm{e}^{0.6} - \mathrm{e}^{-0.6}}{2} = 0.6367$$

b. Si α es el ángulo de inclinación de la recta tangente en el punto indicado, entonces tenemos:



$$\alpha = \tan^{-1}(0.6367) = 0.567\,rad = \frac{180}{\pi}(0.567) = 32.48°$$

Luego, el ángulo que forma la curva con el poste es:

$$\theta = 90° - 32.48° = 57.52°$$

Problema 3.5.3 Probar las siguientes identidades:

a. $\cosh x + \mathrm{senh}\, x = \mathrm{e}^{x}$ **b.** $\cosh x - \mathrm{senh}\, x = \mathrm{e}^{-x}$

c. $\mathrm{senh}(x+y) = \mathrm{senh}\, x\cosh y + \cosh \mathrm{senh}\, y$

Solución

a. $\cosh x + \mathrm{senh}\, x = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \dfrac{2\mathrm{e}^{x}}{2} = \mathrm{e}^{x}$

b. $\cosh x - \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$

c.
$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^x e^y - e^{-x}e^{-y}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(\cosh x + \operatorname{senh} x)(\cosh y + \operatorname{senh} y)\right]\\ &\qquad\qquad - \left[(\cosh x - \operatorname{senh} x)(\cosh y - \operatorname{senh} y)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[2\operatorname{senh} x \cosh y + 2\cosh x \operatorname{senh} y\right]\\ &= \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y\end{aligned}$$

Problema 3.5.4 Probar las igualdades dadas en el teorema 3.5.3:

1. $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ **2.** $\coth^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ x \geq 1$

3. $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},\ \mid x \mid < 1$ **4.** $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1},\ \mid x \mid > 1$

5. $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x},\ 0 < x \leq 1$

6. $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\mid x \mid}\right),\ x \neq 0$

Solución

Probamos 1, 3 y 6. Las otras tres se demuestran de manera análoga.

1. Sea $y = \operatorname{senh} x$. Luego, $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Despejamos x en términos de y:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x$$
$$\Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado:

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Como $\sqrt{y^2+1} > y$, tenemos:

$$y + \sqrt{y^2+1} > 0 \quad \vee \quad y - \sqrt{y^2+1} < 0$$

Como $\mathrm{e}^x > 0$, escogemos la raíz positiva. Esto es:

$$\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

Tomando logaritmo:

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

Cambiando de variables:

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

3. Sea $y = \tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$

Despejamos x en términos de y:

$$\begin{aligned} y = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} &\Rightarrow \mathrm{e}^{2x} - 1 = y\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right) \Rightarrow \mathrm{e}^{2x} - 1 = y\mathrm{e}^{2x} + y \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^{2x} - y\mathrm{e}^{2x} = 1 + y \Rightarrow \mathrm{e}^{2x}(1-y) = 1+y \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \end{aligned}$$

Tomando logaritmo, y luego cambiando de variables:

$$\begin{aligned} 2x = \ln\frac{1+y}{1-y} &\Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} \\ &\Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

6. Sea $y = \operatorname{cosech} x$. Luego:

$$y = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}} = \frac{2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$$

Despejamos x en términos de y:

$$\begin{aligned} y = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1} &\Rightarrow y\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right) = 2\mathrm{e}^x \Rightarrow y\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - y = 0 \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4y^2}}{2y} \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y} \end{aligned}$$

Como $e^x > 0$, debemos escoger el valor positivo de $\frac{1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$. Para esto, analizamos dos casos, $y < 0$ y $y > 0$.

Si $y < 0$, el cociente $\frac{1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$ es positivo cuando el numerador es negativo. Esto sucede cuando tomamos, como numerador, a $1 - \sqrt{1+y^2}$. Luego:

$$\begin{aligned} e^x &= \frac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} - \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{-y} \\ &= \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|\, y \,|} \end{aligned}$$

Si $y > 0$, el cociente $\frac{1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$ es positivo cuando el numerador es positivo. Esto sucede cuando tomamos como numerador a $1 + \sqrt{1+y^2}$. Luego:

$$e^x = \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|\, y \,|}$$

En cualquiera de los dos casos, hemos conseguido que:

$$e^x = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|\, y \,|}$$

Tomando logaritmo y cambiando de variables, obtenemos que:

$$y = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|\, x \,|}\right)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.5

En los problemas del 1 al 10, hallar la derivada $y' = D_x y$.

1. $y = \tanh^{-1}(\cosh x)$

2. $y = e^{\operatorname{senh}(2x)}$

3. $y = x^{\tanh x},\ x > 0$

4. $y = \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{6}\tanh^3\left(\frac{x}{2}\right)$

5. $y = e^{ax}\cosh bx$

6. $y = \sqrt[4]{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}$

7. $y = \left(\operatorname{cosech}^{-1} x\right)^2$

8. $y = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x^2}{a^2}$

9. $y = \tanh^{-1}(\sec x)$

10. $y = \tan^{-1} x + \tanh^{-1} x$

11. Probar las siguientes identidades dadas en el teorema 3.5.1:

a. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

b. $\cosh(-x) = \cosh x$

c. $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$

d. $\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \operatorname{senh} x\operatorname{senh} y$

12. Probar las identidades:

a. $\operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh} x\cosh y - \cosh x\operatorname{senh} y$

b. $\cosh(x-y) = \cosh x\cosh y - \operatorname{senh} x\operatorname{senh} y$

c. $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$

d. $\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2\operatorname{senh}\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$

e. $\cosh x - \cosh y = 2\operatorname{senh}\frac{x+y}{2}\operatorname{senh}\frac{x-y}{2}$

f. $\operatorname{senh} 3x = 3\operatorname{senh} x + 4\operatorname{senh}^3 x$

13. Probar las igualdades 2, 3, 4, 5 y 6 del teorema 3.5.4.

SECCION 3.6

RAZÓN DE CAMBIO

Razón de cambio no es más que otra forma de referirse a la derivada cuando se concibe como el límite de un cociente (razón) incremental. Por definición, si x_0 es un punto del dominio de la función $y = f(x)$, entonces:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{donde} \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad \text{y} \quad \Delta x = x - x_0$$

El incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ mide el cambio experimentado por $y = f(x)$ cuando cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$. El cociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

es la razón de cambio promedio de y respecto a x cuando x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$. El límite de este cambio promedio, cuando $\Delta x \to 0$, es la razón de cambio instantáneo de y respecto a x en x_0. Pero éste no es otra cosa que la derivada $f'(x_0)$. En resumen:

Si $y = f(x)$, la razón de cambio (instantánea) de y respecto a x, entonces en x_0 es $f'(x_0)$.

Esta nueva interpretación de la derivada, como una razón de cambio, amplifica el panorama de sus aplicaciones. El mundo en que vivimos no es estático, es dinámico y cambiante. La población aumenta, recursos naturales disminuyen, indicadores de inflación o producción bajan o suben, etc.

De estos fenómenos que pueden ser cuantificados mediante una función, es importante conocer su correspondiente razón de cambio. Así, por ejemplo, un ingeniero desea conocer la razón con que sale el agua de una represa; o un biólogo, la tasa de crecimiento de una población de insectos.

Ya conocemos dos razones de cambio: la velocidad y la aceleración. La velocidad es la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo, mientras que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo.

Ejemplo 3.6.1

Si V es el volumen de un cubo de x cm de arista ($V = x^3$), hallar:

a. la razón de cambio promedio de V cuando x cambia de 5 a 5.1.

b. la razón de cambio de V cuando $x = 5$.

Solución

a. Tenemos que $x_0 = 5$, $\Delta x = 5.1 - 5 = 0.1$. Luego:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = \frac{V(5+0.1) - V(5)}{0.1} = \frac{(5.1)^3 - 5^3}{0.1}$$

$$= 76.51\ cm^3$$

b. Nos piden $V'(5)$.

$$V'(5) = 3x^2 \Rightarrow V'(5) = 3(5)^2 = 75\ cm^3$$

En Economía se emplea el término *marginal* para referirse a la razón de cambio. De esta manera, el costo marginal es la razón de cambio (derivada) de la función costo.

Ejemplo 3.6.2

Una empresa estima que el costo de producir x artículos es el siguiente:

$$C(x) = 0.5x^2 + 6x + 2,000$$

a. Hallar la función costo marginal.

b. Hallar el costo marginal al nivel de producción de 100 artículos.

Solución

a. $C'(x) = x + 6$ **b.** $C'(100) = 100 + 6 = 106$

RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Supongamos que tenemos dos variables, x e y, que son (ambas) funciones del tiempo: $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Además, estas variables están relacionadas mediante una ecuación $F(x, y) = 0$.

Derivando implícitamente esta ecuación, respecto al tiempo, se obtiene otra ecuación que relaciona las razones de cambio $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$. Por este motivo, diremos que $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ son razones de cambio **relacionadas**. En estos casos, si se conoce una de ellas, es posible encontrar la otra.

ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Hay varias formas de resolver problemas de razones de cambio relacionadas; no obstante, sugerimos seguir los siguientes pasos, que ocasionalmente pueden presentar variaciones.

Paso 1. Construir una figura que ilustre el problema, indicando constantes y variables.

Paso 2. Identificar la información que se pide, y de escribir los datos que se proporcionan.

Paso 3. Escribir las ecuaciones que relacionan a variables y constantes.

Paso 4. Derive implícitamente la ecuación hallada en el paso 3.

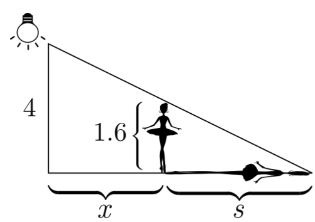
Paso 5. Sustitúyase, en la ecuación que resulta al derivar, todos los datos pertinentes al momento particular para el que se pide la respuesta.

Ejemplo 3.6.3

Una bailarina de ballet, de 1.60 m. de estatura, ensaya en una habitación que está iluminada por un foco ubicado en el centro, a 4 m. de altura.

En determinado instante, la bailarina se aleja del centro de la habitación a razón de 45 m/min. ¿A razón de cuántos metros por minuto crece su sombra en ese instante?

Solución



Paso 1. Construcción de una figura.

Paso 2. Identificar la información que se pide.

Sea t_0 el instante en el que la bailarina se aleja a 45 m/min.

Es decir, cuando:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 45\ m/min$$

Se pide hallar $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=t_0}$, donde s es la longitud de la sombra.

Paso 3. Por semejanza de triángulos, se tiene que:

$$\frac{s}{s+x} = \frac{1.6}{4} \Rightarrow s = \frac{2}{3}x \qquad (1)$$

Paso 4. Derivamos la ecuación (1): $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2}{3}\dfrac{dx}{dt}$

Paso 5. En la ecuación anterior, tomando $t = t_0$, se tiene:

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{2}{3}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} \Rightarrow \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{2}{3}(45\ m/min) = 30\ m/min$$

Es decir que, en el instante t_0, la sobra crece a razón de 30 m/min

---

En la práctica, los 5 pasos enunciados anteriormente no se especifican, quedando sobreentendidos.

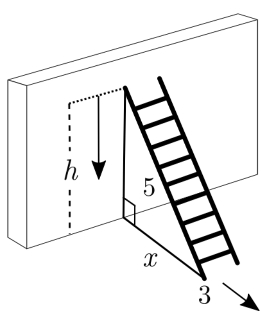
Ejemplo 3.6.4

Los extremos de una escalera, de 5 m de longitud, están apoyados sobre una pared vertical y un piso horizontal. Si al empujarla por la base se logra que ésta se aleje de la pared a razón de 20 m/seg. ¿Con que rapidez baja el extremo superior de la escalera cuando la base está a 3 m de la pared?

Solución

Sean:

- x: la distancia de la pared al extremo inferior de la escalera.
- h: la altura desde el suelo al extremo superior de la escalera.



Nos piden hallar la velocidad con la que desciende el extremo superior de la escalera cuando la base está a 3 m de la pared. En otros términos, nos piden la razón de cambio de h respecto al tiempo cuando $x = 3$; es decir:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{x=3}$$

Como dato, nos dan la razón con que la base de la escalera se aleja de la pared. Es decir:

$$\frac{dx}{dt} = 20\ m/seg$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$h^2 + x^2 = 5^2 \tag{1}$$

Derivamos implícitamente esta ecuación respecto a t, y sustituimos los datos válidos para el momento en que $x = 3$ en la ecuación resultante (1).

$$2h\frac{dh}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{x}{h}\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

Pero, $\frac{dx}{dt} = 20\ m/seg$. Además, cuando $x = 3$, de (1) se tiene que:

$$h = \sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Reemplazando estos valores en (2):

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{x=3} = -\frac{3}{4}(20\ m/seg) = -15\ m/seg.$$

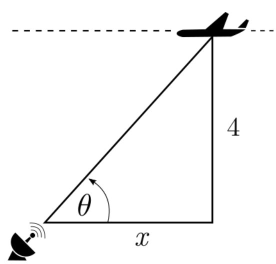
Ejemplo 3.6.5

Un avión vuela horizontalmente a una altura constante de 4 km, y a una velocidad constante de 300 $km/hora$. La trayectoria pasa por una estación de radar, desde donde el operador observa al avión. Hallar la velocidad con que cambia el ángulo de inclinación θ, de la línea de observación, en el instante en que la distancia horizontal del avión, a la estación de radar, es de 3 km.

Solución

Sea x la distancia horizontal del avión al radar. Se tiene que:

$$\cot\theta = \frac{x}{4}, \quad \text{o bien} \quad \theta = \cot^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$$



Derivando respecto a t:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{-4}{16 + x^2}\frac{dx}{dt}$$

Nos dicen que $\frac{dx}{dt} = -300\ km/h$, donde el signo negativo significa que la distancia x es decreciente.

Ahora, cuando $x = 3$:

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=3} = \frac{-4}{16 + 3^2}(-300) = 48\ rad/h$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.6

Problema 3.6.1

Un barco navega hacia el norte, a razón de 12 km/h. mientras que otro barco navega con dirección este, a 16 km/h. El primero pasa por la intersección de las trayectorias a las 3:30 P.M. y el segundo a las 4 P.M. ¿Cómo está cambiando la distancia entre los barcos a:

a. las 3:30 P.M.? **b.** las 5 P.M.?

Solución

Comenzamos a computar el tiempo desde el instante en que el segundo barco pasa por la intersección de las trayectorias. Esto es, $t = 0$ a las 4 PM.

En este instante, el primer barco se encuentra a $12\left(\frac{1}{2}\right) = 6\,km$. al norte de la intersección. Después de transcurrir t horas, el primer barco se encuentra a $6 + 12t\,km$. de la intersección, y el segundo a $16t\,km$.

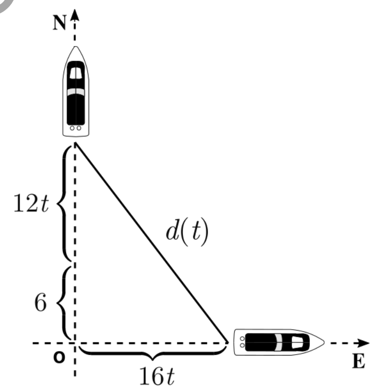
Sea $d(t)$ la distancia entre los barcos t horas después de las 4 P.M.

A las 3:30 P.M. se tiene que:

$$t = -\frac{1}{2} \text{ y a las 5 P. M, } t = 1$$

Se pide hallar:

$$\textbf{a. } d'\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad \textbf{b. } d'(1)$$



Por Pitágoras, se tiene que:

$$d^2(t) = (6 + 12t)^2 + (16t)^2$$

$$\Rightarrow d^2(t) = 400t^2 + 144t + 36$$

Derivando la última ecuación con respecto al tiempo t:

$$2d(t)d'(t) = 800t + 144 \Rightarrow d'(t) = \frac{400t + 72}{\sqrt{400t^2 + 144t + 36}}$$

a. Ahora, a las 3:30 P.M. $t = -\frac{1}{2}$. Luego:

$$d'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{400\left(-\frac{1}{2}\right) + 72}{\sqrt{400\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 144\left(-\frac{1}{2}\right) + 36}} = -16\ km/h$$

Es decir que a las 3:30 P.M. la distancia entre los barcos está cambiando a razón de $-16\ km/h$. (el signo negativo significa que la distancia está decreciendo en el instante dado).

b. A las 5 P.M. $t = 1$. Luego:

$$d'(1) = \frac{400(1) + 72}{\sqrt{400(1)^2 + 144(1) + 36}} = 19.60\ km/h.$$

A las 5 P.M. la distancia entre los barcos está cambiando a razón de 19.60 kilómetros por hora.

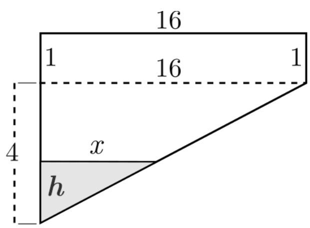
Problema 3.6.2

Una piscina tiene 16 m. de largo, 12 m. de ancho, con una profundidad de 1 m. en un extremo, y 5 m. en el otro. Además, el fondo es un plano inclinado.

Si se vierte agua en la piscina a razón de 4 m^3/min. ¿Con que velocidad se eleva el nivel del agua cuando este, es de 1 metro en el extremo más profundo?

Solución

Sea h el nivel del agua, y sea x el largo de la superficie del agua cuando está a nivel h.

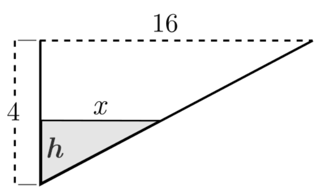


Se pide encontrar:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1}$$

Además, nos dicen que si V es el volumen del agua en la piscina, este crece a razón de 4 m^3/min. Esto es:

$$\frac{dV}{dt} = 4\ m^3/min$$



Bien, por semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{16} = \frac{h}{4} \Rightarrow x = 4h \qquad (1)$$

Por otro lado, el volumen del agua de la piscina es:

$$V = \frac{xh}{2}(12) = 6xh$$

Reemplazando (1) en esta igualdad:

$$V = 24h^2$$

Derivando esta ecuación respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = 48h\frac{dh}{dt}$$

Recordando que $\frac{dV}{dt} = 4\ m^3/min.$ y particularizando para $h = 1$:

$$4 = 48(1)\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1} \Rightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1} = \frac{1}{12}$$

El nivel del agua, cuando este se encuentra a 1 metro de altura, crece a razón de $\frac{1}{12}$ metros por minuto.

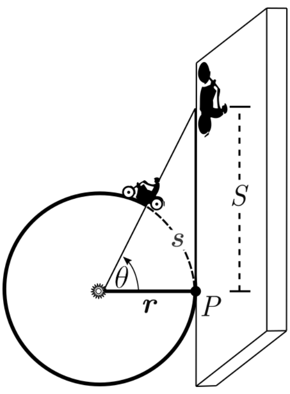
Problema 3.6.3

Un motociclista conduce en una pista circular a razón de 360 m/min. En el centro de la pista alumbra un foco, el cual proyecta la sombra del motociclista sobre una pared que es tangente a la pista en un punto P.

¿Con qué velocidad se mueve la sombra al instante en que el motociclista ha recorrido $\frac{1}{12}$ de la pista desde P?

Solución

Sean:



- r: el radio de la pista.
- s: la longitud del recorrido del motociclista a partir del punto P.
- S: la longitud del recorrido de la sombra sobre la pared.

Nos piden $\frac{dS}{dt}$ cuando $s = \frac{1}{12}$ de la pista desde P, y nos dicen que:

$$\frac{ds}{dt} = 360 \text{ metros por minuto}$$

Se tiene que:

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ radianes}, \quad S = r\tan\theta \Rightarrow S = r\tan\left(\frac{s}{r}\right)$$

Derivando la última ecuación respecto a t:

$$\frac{dS}{dt} = r\sec^2\left(\frac{s}{r}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{r}\right) = r\left(\frac{1}{r}\right)\sec^2\left(\frac{s}{r}\right)\frac{ds}{dt} = \sec^2\left(\frac{s}{r}\right)\frac{ds}{dt} \tag{1}$$

Pero, cuando $s = \frac{1}{12}$ de la pista desde P, se tiene que:

$$s = \frac{1}{12}(2\pi r) = \frac{1}{6}\pi r \Rightarrow \frac{s}{r} = \frac{\pi}{6}$$

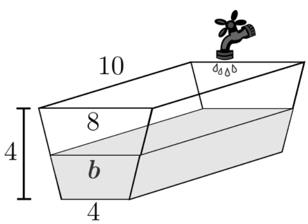
Luego, cuando $s = \frac{1}{12}$ de la pista, de **(1)** se tiene:

$$\frac{dS}{dt} = \sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)(360) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 (360\ m/min) = 480\ m/min.$$

Problema 3.6.4

Un abrevadero posee 10 pies de largo, y por extremos a dos trapecios de 4 pies de altura, con bases de 4 y 8 pies. Si se vierte agua al abrevadero a razón de 24 $pies^3/min$. ¿con qué rapidez crece el nivel del agua en el instante en que esta tiene 2 pies de profundidad?

Solución



Sean:

- h: altura del agua en el instante t (en minutos).
- b: el ancho de la superficie del agua al nivel h.
- V: el volumen del agua cuando está a nivel h.

Nos piden: $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=2}$

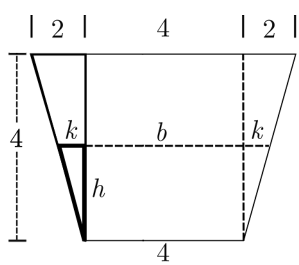
Nos dicen que $\frac{dV}{dt} = 24\ pies^3/min$.

Hallemos V. Sabemos que $V = 10A$, donde A es el área de una cara lateral; y dado que esta cara es un trapecio, se tiene:

$$A = \frac{1}{2}(b+4)h \tag{1}$$

Para favorecer la ilustración, separamos uno de los trapecios que conforman las caras laterales del abrevadero.

$$\frac{k}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow k = \frac{h}{2}$$



Pero, es fácil ver que:

$$k = \frac{b-4}{2}$$

Luego:

$$\frac{b-4}{2} = \frac{h}{2} \Rightarrow b = h + 4$$

Reemplazando este valor b en (1), tenemos:

$$A = \frac{1}{2}(h+4+4)h = \frac{1}{2}(h+8)h$$

En consecuencia, el volumen del agua es:

$$V = 10\left(\frac{1}{2}(h+8)h\right) = 5h^2 + 40h$$

Derivando respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = (10h+40)\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{10h+40}\frac{dV}{dt}$$

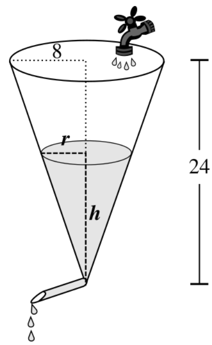
En particular, cuando $h = 2$:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2} = \frac{1}{10h+40}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=2} = \frac{1}{60}\left(24\,pies^3/min\right) = 0.4\,pies^3/min$$

Problema 3.6.5

Un tanque tiene la forma de cono invertido, con 8 m de radio y 24 m. de altura. Se vierte agua en el tanque a razón de 40 $m^3/hora$, pero también se extrae agua para riego simultáneamente. Si el nivel del agua está subiendo a razón de 4 $m/hora$ cuando éste tiene 3 m. de altura ¿con qué rapidez sale el agua en ese instante?

Solución



Sean:

- t: el tiempo medido en horas.
- r: el radio en metros de la superficie del agua en el instante t.
- h: la altura del nivel del agua en el instante t.
- V: el volumen del agua en el instante t.
- S: la cantidad de agua que ha salido hasta el instante t.

Nos piden hallar $\left.\dfrac{dS}{dt}\right|_{h=3}$ Nos dicen que $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=3} = 4\ m/hora.$

Es claro que:

Razón de cambio de V = Razón de entrada del agua − Razón de salida

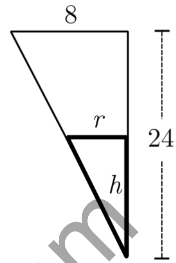
Esto es:

$$\frac{dV}{dt} = 40 - \frac{dS}{dt} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 40 - \frac{dV}{dt} \Rightarrow \left.\frac{dS}{dt}\right|_{h=3} = 40 - \left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=3} \qquad (1)$$

Pero, el volumen del agua es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (2)$$

Por semejanza de triángulos, se tiene:



$$\frac{r}{h} = \frac{8}{24} \Rightarrow r = \frac{1}{3}h \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$V = \frac{1}{27}\pi h^3$$

Derivando respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

En particular, cuando $h = 3$, se tiene:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=3} = \frac{1}{9}\pi h^2 \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=3} = \frac{1}{9}\pi (3)^2 (4\ m/hora) = 4\pi\ m^3/hora$$

Reemplazando este resultado en (1):

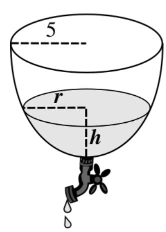
$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{h=3} = 40 - \left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=3} = 40 - 4\pi \approx 27.43\ m^3/h.$$

Problema 3.6.6

Se tiene un tanque semiesférico de 5 m. de radio que está lleno de agua y se comienza a vaciar abriendo un grifo situado en el fondo. Si por este grifo salen 3,500 $litros/hora$ ¿con qué velocidad baja el nivel del agua cuando este tiene 1.25 m. de altura? Se sabe que el volumen de un casquete esférico de altura h, en una esfera de radio r, es $V = \pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$.

Solución

Nos piden hallar: $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=1.25}$



Sabemos que $3,500\ litros/hora = 3.5\ m^3/hora$.

Nos dicen que $\dfrac{dV}{dt}$ es constante, y que:

$$\frac{dV}{dt} = 3,500\ litros/hora = -3.5\ m^3/hora.$$

El volumen de agua, tomando en cuenta que $r = 5\ m$, es:

$$V = 5\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$

Derivamos esta función respecto al tiempo t (t en horas):

$$\frac{dV}{dt} = 10\pi h \frac{dh}{dt} - \pi h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h(10-h)} \frac{dV}{dt}$$

En esta última igualdad, particularizando para $h = 1.25$, tenemos:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1.25} = \frac{1}{\pi(1.25)(10-1.25)}(-3.5) \approx -0.1019\ m/hora.$$

Problema 3.6.7

Una bombilla alumbra desde el extremo superior de un poste de 48 pies de altura. Se suelta una pelota de acero desde un punto situado a 64 pies de altura, cuya trayectoria está a 15 pies de distancia de la bombilla.

Hallar la velocidad con que se mueve la sombra de la pelota en el instante en que ésta golpea el piso, considerando que la posición de la pelota, después de t segundos, es $s = 16t^2$.

Solución

Sea T el punto donde la pelota golpea el piso. Sea x la distancia desde el punto T hasta la sombra S.

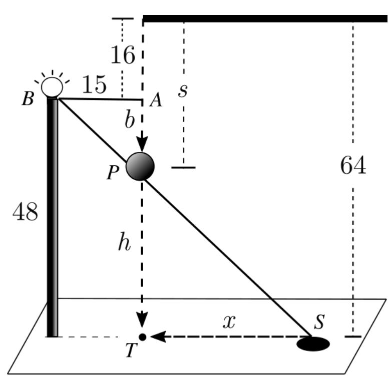
La pelota golpea el suelo cuando:

$$s = 64 \Rightarrow 16t^2 = 64 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2$$

Es decir que la pelota golpea el suelo 2 segundos después de soltarla.

Nos piden hallar:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2}$$



Los triángulos $\triangle STP$ y $\triangle BAP$ son semejantes. Luego,

$$\frac{x}{15} = \frac{h}{b} \Rightarrow x = 15\frac{h}{b}$$

Pero, $\quad h = 64 - s \quad$ y $\quad b = s - 16.$

En consecuencia:

$$x = 15\frac{64-s}{s-16}$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 15\frac{(s-16)\left(-\frac{ds}{dt}\right)-(64-s)\left(\frac{ds}{dt}\right)}{(s-16)^2} &&= -15\frac{48}{(s-16)^2}\frac{ds}{dt} \\
&= -15\frac{48}{\left(16t^2-16\right)^2}(32t) &&= -15\frac{48}{(16)^2\left(t^2-1\right)^2}(32t) \\
&= -\frac{90t}{\left(t^2-1\right)^2}
\end{aligned}$$

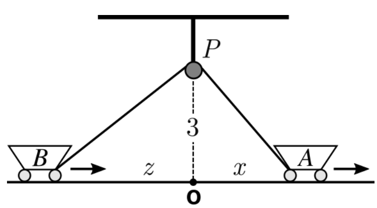
Ahora, para $t=2$, se tiene:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=2} = -\frac{90(2)}{\left(2^2-1\right)^2} = -20\ pies/seg$$

Problema 3.6.8

Un cable de 14 metros de longitud pasa por una polea P que enlaza dos carritos. El punto O está ubicado en el suelo, directamente debajo de la polea, y a 3 metros de la misma.

Si el carrito A es halado, alejándolo del punto O a una velocidad de 40 m/min. ¿con que velocidad se aproxima el carrito B al punto O en el instante en que el carrito A está a 4 metros de O?



Solución

Sean x y z las distancias de los carritos, A y B, al punto O respectivamente.

Nos dicen que $\dfrac{dx}{dt} = 40\ m/min$, y nos piden :

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{x=4}$$

Los carritos A y B, el punto O y la polea P forman dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas están cubiertas por el cable. Las longitudes de estas hipotenusas son: $\sqrt{z^2+3^2}$ y $\sqrt{x^2+3^2}$. Luego:

$$\sqrt{z^2+9}+\sqrt{x^2+9} = 14 \qquad (1)$$

Derivando respecto a t:

$$\frac{2z}{2\sqrt{z^2+9}}\frac{dz}{dt}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}\frac{dx}{dt}=0\Rightarrow\frac{dz}{dt}=-\frac{x\sqrt{z^2+9}}{z\sqrt{x^2+9}}\frac{dx}{dt}\qquad(2)$$

Si $x=4$, obtenemos de (1):

$$\begin{aligned}\sqrt{z^2+9}+\sqrt{(4)^2+9}=14&\Rightarrow\sqrt{z^2+9}+5=14\\&\Rightarrow\sqrt{z^2+9}=9\\&\Rightarrow z=6\sqrt{2}\end{aligned}$$

Luego, reemplazando $x=4$ e $z=6\sqrt{2}$ en (2):

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{x=4}=-\frac{4(9)}{6\sqrt{2}(5)}(40\ m/min.)=-\frac{48}{\sqrt{2}}=-24\sqrt{2}\approx-33.94\ m/min$$

El signo negativo de la velocidad anterior significa que la distancia, del carrito B al punto O, es decreciente.

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.6

1. El consumo anual de gasolina de un país es $C(t)=32.8+0.3t+0.15t^2$, donde $C(t)$ es dado en millones de litros, y t es dado en años computados al iniciarse el año 2004. Hallar la tasa de consumo anual para el inicio del año 2010.

2. Se ha determinado que dentro de t años la población de una comunidad será de $P(t)=12-\frac{20}{t+3}$ miles de habitantes. Hallar:

- **a.** la tasa de crecimiento después de 7 años.
- **b.** la tasa porcentual después de 7 años. Tasa porcentual $=100\frac{P'(t)}{P(t)}$.

3. Se arroja una piedra a un estanque, y produce olas circulares cuyos radios crecen a razón de 0.5 m/seg. Hallar la razón con que aumenta el área del círculo encerrado por una ola cuando el radio de ésta es de 3 m.

4. Un tanque de agua tiene la forma de un cono invertido de 15 $m.$ de altura y 5 $m.$ de radio. Si se está llenando de agua a razón de $6\pi\ m^3$ por minuto., ¿con qué rapidez crece el nivel del agua cuando éste tenga 6 $m.$ de profundidad?

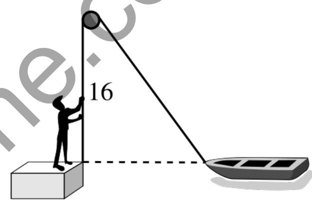
5. Los extremos de una escalera de 20 m. están apoyados sobre una pared vertical y un piso horizontal. Si el extremo inferior de la escalera se aleja de la pared a una velocidad de 6 m/min. ¿a qué velocidad se mueve el extremo superior cuando la parte inferior está a 12 m. de la pared?

6. Un barco navega con dirección Norte a razón de 6 km/h. Otro barco navega con dirección Este a 8 km/h. A las 11 A.M. el segundo barco cruzó la ruta del primero en un punto por el cual éste atravesó 2 horas antes. ¿Cómo está cambiando la distancia de los barcos a las 10 A.M.?

7. Desde la parte superior de un poste de 7.2 m. alumbra una bombilla. Un policía de 1.80 m. de altura se aleja caminando desde el poste, a una velocidad de 48 m/min. ¿Con qué velocidad crece su sombra?

8. Se estaciona un bote en el muelle jalándolo con una polea que está a 16 pies encima de la cubierta del bote.

Si la polea enrolla la cuerda a razón de 48 $pies/min$, hallar la velocidad del bote cuando quedan 20 pies de cuerda.



9. Una partícula se mueve sobre la parábola $y = x^2 + 6x$. Hallar la posición de la partícula cuando la razón de cambio de la coordenada y es 4 veces la razón de cambio de la coordenada x.

10. Los lados de un triángulo equilátero miden x cm cada uno, y aumentan a razón de 10 cm/min. ¿Con que rapidez aumenta el área del triángulo cuando $x = 20$ cm?

11. Las dimensiones de un cilindro circular recto están variando. En un cierto instante, el radio y la altura son 8 cm y 20 cm, respectivamente. Hallar la variación de la altura en ese instante si el volumen permanece constante y el radio aumenta a razón de 3 cm/seg.

12. El gas de un globo esférico se escapa a razón de 360 $pies^3/min$. Hallar:

- **a.** la rapidez con que disminuye el radio en el instante en que éste es de 3 pies.
- **b.** la rapidez con que disminuye el área de la superficie en el instante en que el radio es de 3 pies. Se sabe que el área de la superficie esférica es $A = 4\pi r^2$.

13. Sean V, A y r el volumen, el área de la superficie y el radio de una esfera respectivamente. Probar que: $\frac{dV}{dt} = \frac{r}{2}\frac{dA}{dt}$.

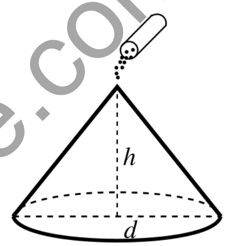
Se sabe que: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $A = 4\pi r^2$.

14. En cada uno de los extremos de un cilindro circular recto de radio r y altura h se coloca una semiesfera de radio r. El radio aumenta a razón de 0.5 m/min. Si el volumen permanece constante, hallar la razón de variación de la altura en el instante en que $r = 4$ m. y $h = 6$ m.

15. Un avión vuela horizontalmente a una altura constante de 900 m. de altura, con velocidad constante. La trayectoria pasa sobre una estación de radar desde donde el operador observa el avión. Cuando el ángulo de inclinación de la línea de observación es de $\frac{\pi}{3}$, este ángulo está cambiando a razón de $\frac{1}{45}$ rad/seg. Hallar la velocidad del avión.

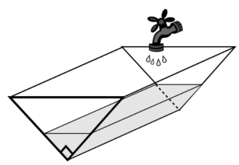
16. En una planta de materiales de construcción una cinta transportadora deposita arena en el piso a razón de 3 m^3/min.

Si el arena forma un montículo en forma de cono, cuyo diámetro de la base es 3 veces la altura, hallar con que rapidez cambia la altura del cono cuando ésta es de 2 m.



17. Un tanque tiene 5 m. de largo, y su sección transversal es un triángulo rectángulo isósceles.

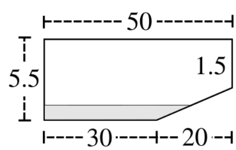
Si se vierte agua al tanque a razón de 15 $m^3/hora$ ¿con qué rapidez sube el nivel del agua cuando éste tiene 0.5 m. de profundidad?



Sugerencia: En un triángulo rectángulo isósceles, la altura correspondiente al ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa.

18. Una piscina tiene 50 m. de largo, 25 m. de ancho.

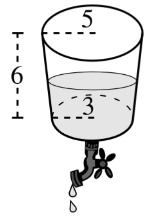
Su profundidad aumenta uniformemente de 1.5 metros a 5.5 metros en una distancia horizontal de 20 metros, con una base horizontal de 30 metros.



Si la piscina se llena a razón de 120 $m^3/hora$ ¿con qué rapidez sube el nivel del agua en el instante en que éste está a 3 m. de la parte más profunda?

19. Un tanque tiene la forma de un cono circular recto truncado de 6 metros de altura, 5 metros de radio mayor y 3 metros de radio menor.

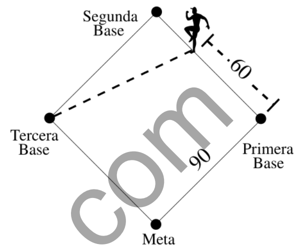
Si el tanque se está desaguando a razón de $16.9\pi\ m^3/hora$, hallar la rapidez con que baja el nivel del agua cuando éste tiene $4\ m$.



El volumen V de un cono circular recto truncado de altura h radios r y R en los extremos es: $V = \frac{\pi}{3}h\left(r^2 + R^2 + rR\right)$.

20. Un campo de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado.

Un jugador está corriendo de la primera base a la segunda con una velocidad de 17 $pies/seg$. Hallar la velocidad con que se aproxima el jugador a la tercera base, en el instante en que éste se encuentra a 60 pies de la primera base.



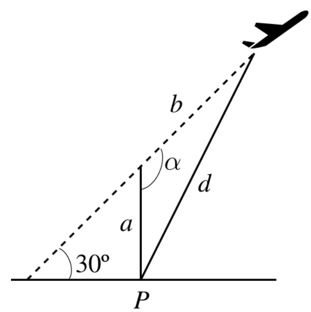
21. Un edificio de 60 metros proyecta su sombra sobre el piso (horizontal), y el ángulo que formado por el piso y los rayos solare disminuye a razón de 15° por hora. Si la sombra del edificio es de 80 metros en determinado instante del día, hallar la razón en que cambia la sombra en ese instante.

22. Un avión se eleva con un ángulo de inclinación de 30° y a una velocidad constante de 600 $km/hora$.

Si el avión pasa a 2 $km.$ por encima de un punto P en el suelo, hallar la razón de cambio de la distancia entre P y el avión 1 minuto más tarde.

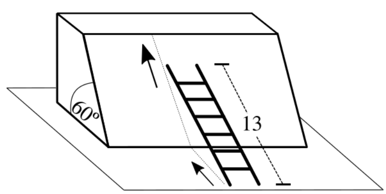
Sugerencia: ley de los cosenos:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$



23. Una escalera de 13 metros de longitud está apoyada sobre un talud inclinado a 60°, con respecto a la horizontal.

Si la base es empujada hacia el talud a razón de 2.9 $m/seg.$ hallar la rapidez con que se desplaza el extremo superior de la escalera cuando la base está a 5 metros del talud.



Sugerencia: Ver la ley de los cosenos en el problema anterior.

24. Un faro está situado a 2 $km.$ de una playa recta y su luz gira a razón de 2 revoluciones por minuto.

Hallar la rapidez con que se mueve el rayo de luz a lo largo de la playa en el momento en que éste pasa por un punto situado a 1 $km.$ del punto frente al faro.

25. Una bombilla alumbra desde el extremo superior de un poste de 60 pies de altura. Desde un punto situado a la misma altura se suelta una pelota de acero, cuya trayectoria está a 20 pies de distancia de la bombilla.

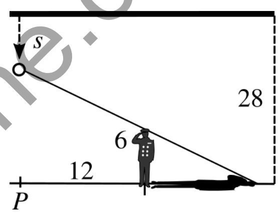
Hallar la velocidad con que se mueve la sombra 0.5 segundos después de soltarla. Recordar que la posición de la pelota, después de t segundos, es:

$$s = 16t^2$$

26. Un policía de 6 pies de altura está haciendo guardia a 12 pies del punto P que está directamente debajo de una lámpara con batería interna, que cuelga a 28 pies sobre el suelo.

La lámpara comienza caer, provocando que la sombra del policía comience a crecer.

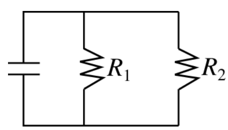
Si la longitud de la trayectoria de la lámpara es $s = 16t^2$ pies en t segundos, ¿con qué velocidad crece la sombra cuando $t = 1$ segundo?



27. Dos resistencias, R_1 y R_2, están conectadas en paralelo.

Se sabe que la resistencia total R es tal que:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



Si R_1 cambia a razón de 0.5 $Homs/seg.$ y R_2 cambia a razón de 0.3 $ohms/seg.$ ¿cómo cambia R cuando $R_1 = 60$ $ohms$ y $R_2 = 80$ $ohms$?

28. Sabiendo que un trozo de hielo esférico se derrite a una razón proporcional al área de su superficie:

a. probar que la razón con que se contrae su radio es constante.

b. hallar el tiempo que tardará en derretirse completamente, si se sabe que después de una hora el hielo que queda es $\frac{1}{8}$ de la cantidad inicial.
Sugerencia: Si r_0 *es el radio inicial y* $= k$, *entonces*:

$$r = kt + r_0.$$

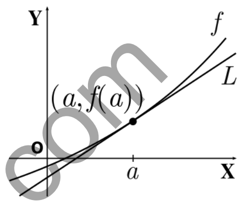
SECCION 3.7

DIFERENCIALES

APROXIMACIÓN LINEAL

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en a. La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a,\ f(a))$ tiene por ecuación:

$$L:\ y = f(a) + f'(a)(x-a)$$



Comparando la gráfica de f y la recta tangente, se puede observar que, para los x cercanos a a, los puntos $(x,\ f(x))$ de la gráfica de f están próximos a los puntos $(x,\ f(a)+f'(a)(x-a))$ de la recta tangente. Por consiguiente, para los puntos x próximos a a, se cumple que:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)}} \qquad \textbf{(1)}$$

Esta aproximación recibe el nombre de *aproximación lineal* o *aproximación tangencial* de f en a; donde la función lineal:

$$\boldsymbol{L(x) = f(a) + f'(a)(x-a),} \tag{2}$$

es la *linearización* de f en a.

Ejemplo 3.7.1 Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$:

a. hallar la linearización de $f(x)$ en $x = 4$

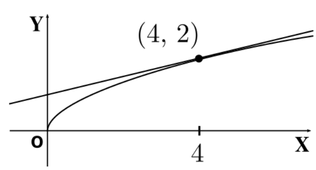
b. usar la linearización encontrada para aproximar $\sqrt{3.95}$ y $\sqrt{4.02}$.

Solución

a. Buscamos: $L(x) = f(4) + f'(4)(x-4)$. Se tiene:

$$f(4) = \sqrt{4} = 2 \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$



Luego, la linearización buscada es:

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) = \frac{x}{4} + 1$$

b. La aproximación lineal es $\sqrt{x} \approx \frac{x}{4} + 1$. Luego:

$$\sqrt{3.94} \approx \frac{3.94}{4} + 1 = 0.985 + 1 = 1.985$$

$$\sqrt{4.02} \approx \frac{4.02}{4} + 1 = 1.005 + 1 = 2.005$$

La calculadora nos dice que:

$$\sqrt{3.94} = 1.984943324 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.02} = 2.004993766$$

DIFERENCIALES

Si $y = f(x)$ es una función diferenciable, según la notación de Leibniz, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ representa a la derivada de y respecto a x. Ahora introducimos el concepto de diferencial que dará significado propio, tanto a $\boldsymbol{dx}$, como a $\boldsymbol{dy}$, de tal forma que $\frac{dy}{dx}$ pueda ser vista como un cociente de dy sobre dx.

Si Δx es cualquier incremento de x, entonces:

$$\boldsymbol{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),} \tag{3}$$

es el correspondiente incremento de y. Sabemos que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Luego, si Δx es pequeño, la razón incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una aproximación a la derivada $f'(x)$. Este hecho lo expresamos así: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$. De aquí obtenemos:

$$\boldsymbol{\Delta y \approx f'(x)\Delta x} \tag{4}$$

Esta expresión nos dice que, cuando Δx es pequeño, la expresión $f'(x)\Delta x$ está próximo al incremento de Δy. Por este motivo, es conveniente fijar la atención en esta expresión, a la que daremos un nombre en la siguiente definición.

Definición

Si $y = f(x)$ es diferenciable, y Δx es un incremento de x, denominaremos:

- **Diferencial de $\boldsymbol{x}$**: denotada por $\boldsymbol{dx}$, es el incremento Δx. Esto es:

$$\boldsymbol{dx = \Delta x}$$

- **Diferencial de $\boldsymbol{y}$**: denotada por $\boldsymbol{dy}$ **o** $\boldsymbol{df}$:

$$\boldsymbol{dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx}$$

Observe que dy es función de dos variables: x y Δx.

Ejemplo 3.7.2 Si $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$:

a. hallar dy **b.** evaluar dy cuando $x = 2$ y $dx = 0.03$

Solución

a. $dy = \dfrac{d}{dx}\left(x^3 - 2x^2 + x + 3\right) dx = \left(3x^2 - 4x + 1\right) dx$

b. Cuando $x = 2$ y $dx = 0.03$, se tiene:

$$dy = \left[3(2)^2 - 4(2) + 1\right](0.03) = 0.15$$

Observación

Si requerimos que $\boldsymbol{dx \neq 0}$ en $\boldsymbol{dy = f'(x)dx}$, entonces podemos dividir ambos lados por dx para obtener:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$$

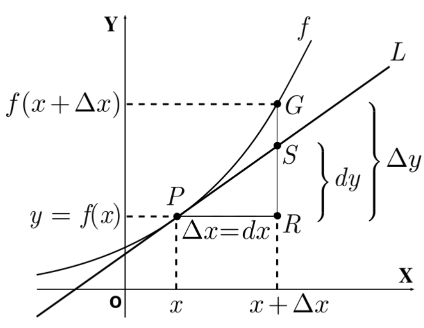
Esto nos dice que el símbolo $\frac{dy}{dx}$ (derivada de y respecto a x) puede ser visto como el cociente de la diferencial dy y la diferencial dx.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIAL

La siguiente figura ilustra una representación geométrica de la diferencial, donde se cumple que:

- L es la recta tangente al gráfico de $y = f(x)$ en el punto $P = (x, y)$.
- La pendiente de esta tangente es $f'(x)$.
- La longitud del segmento $\overline{RS}$ equivale a:

$$f'(x)dx = dy$$



Por otro lado, G es el punto $(x + \Delta x,\ f(x + \Delta x))$; por lo tanto, la longitud del segmento $\overline{RG}$ es igual a Δy.

Se puede apreciar que, para $dx = \Delta x$ pequeño, se obtiene nuevamente la expresión (4):

$$\boldsymbol{\Delta y \approx dy = f'(x)dx} \qquad (4)$$

Ejemplo 3.7.3 Si $y = f(x) = x^2 + 4x - 3$, hallar Δy, dy y $\Delta y - dy$:

a. para cualquier x y cualquier Δx.

b. para $x = 2$ y $dx = 0.01$.

Solución

a. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) - 3 - \left(x^2 + 4x - 3\right)$
$= 2x\Delta x + 4\Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x + 2)\Delta x + (\Delta x)^2$
$dy = f'(x)dx = (2x + 4)dx = 2(x + 2)dx$

$$\Delta y - dy = (\Delta x)^2$$

b. Si $x = 2$, $\Delta x = dx = 0.01$. Reemplazando en (a), tenemos:

$$\Delta y = 2(2 + 2)(0.01) + (0.01)^2 = 0.08 + 0.0001 = 0.0801$$
$$dy = 2(2 + 2)(0.01) = 0.08$$

$$\Delta y - dy = (0.01)^2 = 0.0001$$

APROXIMACIÓN LINEAL EN TÉRMINOS DE LA DIFERENCIAL

Tenemos la aproximación lineal:

$$\boldsymbol{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)} \qquad (1)$$

Ahora, queremos expresar esta fórmula en términos de la diferencial, para lo cual hacemos $x = a + \Delta x$, de modo que $\Delta x = x - a$. Luego, reemplazando en (1), obtenemos:

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x, \quad \text{o bien} \quad f(a + \Delta x) \approx f(a) + dy$$

Por ultimo, cambiando a por x, se tiene:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy}} \qquad (5)$$

Esta fórmula también se puede obtener fácilmente de las fórmulas (3) y (4); sin embargo, preferimos la deducción que hemos hecho, ya que esta nos indica que ambas fórmulas, la (1) y la (5), expresan la misma aproximación. En consecuencia, ambas conducen al mismo resultado.

Ejemplo 3.7.4 Hallar un valor aproximado de $\sqrt[3]{65}$ usando diferenciales.

Solución

Consideremos la función $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$. Su diferencial es:

$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}dx$$

Reemplazando estos valores en la expresión (5), tenemos:

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}dx$$

El número entero más próximo a 65 que tiene raíz cúbica exacta es 64. Luego, haciendo $x = 64$ y $\Delta x = dx = 1$ en la expresión anterior, tenemos:

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} \approx \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3(64)^{\frac{2}{3}}}(1) = 4 + \frac{1}{48} \approx 4.0208333$$

Se sabe que las 8 primeras cifras de $\sqrt[3]{65}$ son 4.0207258; por lo que la aproximación que hemos encontrado tiene una exactitud de tres cifras decimales.

ESTIMACIÓN DE ERRORES

La diferencial se aplica en la estimación de los efectos causados por los errores cometidos al medir ciertas magnitudes.

Si x es una variable cuyo valor es estimado con cierto error posible, y $y = f(x)$ es otra variable en función de x, entonces también existirá un error al calcular $y = f(x)$ a partir de x. Si el valor correcto es $x + dx$, entonces el **error de medición** es $\boldsymbol{dx}$. Por otro lado, el valor correcto de la variable y es $f(x + dx)$, y el valor calculado con error es $f(x)$. Luego, el error cometido en la variable y, es decir, el *error de propagación*, es el siguiente:

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x).$$

En consecuencia, si el error dx es pequeño (que es lo esperado) el error Δy puede ser aproximado por la diferencial $dy = f'(x)dx$. Esto es:

$$\boxed{\textbf{Error de } \boldsymbol{y = \Delta y \approx dy = f'(x)dx}}$$

No es igual cometer un error de 1 centímetro al medir un metro que cometer el mismo error al medir 10 metros. Para distinguir estas situaciones, se define el error relativo y el error porcentual.

Definición Si Δy es el error de y, entonces:

- El **error relativo** de $\boldsymbol{y}$ es el cociente $\frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{y}} \approx \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{y}}$
- El **error porcentual** de $\boldsymbol{y}$ es $\mathbf{100}\frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{y}} \approx \mathbf{100}\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{y}}$

En general, el valor exacto del error cometido siempre será desconocido, ya que, de no serlo, lo lógico sería corregirlo sin hacer ninguna estimación. No obstante, lo esperado es conocer un margen del error; es decir, un número $\epsilon > 0$ tal que:

$$\mid \boldsymbol{dx} \mid \leq \boldsymbol{\epsilon}$$

Ejemplo 3.7.5

Se ha detectado un tumor de forma esférica en una persona. Los cálculos correspondientes arrojan como resultado que el radio del tumor es de 2 centímetros, con un margen de error de 0.05 centímetros. Estimar:

a. el margen de error al calcular el volumen del tumor.

b. el margen de error relativo.

c. el margen de error porcentual.

Solución

a. El volumen de una esfera de radio r está dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{y, por tanto,} \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

El margen de error al medir el radio es 0.05 cm. Luego:

$$\mid dr \mid \leq 0.05 \quad \text{y} \quad \mid \Delta V \mid \approx \mid dV \mid = \mid 4\pi r^2 dr \mid \leq 4\pi(2)^2(0.05) \approx 2.51 cm^3$$

Esto es, una estimación del margen de error al calcular el volumen con los datos enunciados es 2.51 cm^3.

b. $$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \approx \left|\frac{dV}{V}\right| = \left|\frac{4\pi r^2 dr}{\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3}\right| = \frac{3 \mid dr \mid}{r} \leq 3\frac{0.05}{2} = 0.075$$

c. $$\left|100\frac{\Delta V}{V}\right| \approx \left|100\frac{dV}{V}\right| \leq 100(0.075) = 7.5\,\%$$

Teorema 3.7.1

Si u y v son funciones diferenciables de x, y c es una constante, entonces:

1. $\boldsymbol{dc = 0}$
2. $\boldsymbol{d(cu) = cdu}$
3. $\boldsymbol{d(u \pm v) = du \pm dv}$
4. $\boldsymbol{d(uv) = udv + vdu}$
5. $\boldsymbol{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}}$
6. $\boldsymbol{d\left(u^n\right) = nu^{n-1}du}$

Demostración

Cada una de estas igualdades proviene de las correspondientes fórmulas de derivación. Probaremos (4) y (5), dejando las restantes a cargo del lector.

4. Sabemos por definición que:

$$du = \frac{du}{dx}dx \quad \text{y} \quad dv = \frac{dv}{dx}dx$$

Por otro lado, por la regla de la derivada de un producto, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Luego:

$$d(uv) = \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx = u\frac{dv}{dx}dx + v\frac{du}{dx}dx = udv + vdu$$

5. Por regla de la derivada de un cociente, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Luego:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}dx = \frac{v\frac{du}{dx}dx - u\frac{dv}{dx}dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Ejemplo 3.7.6 Hallar dy si $y = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$

Solución

$$dy = \frac{\left(x^2+1\right)d\left(e^{2x}\right) - e^{2x}d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \qquad \text{(por 5)}$$

$$= \frac{\left(x^2+1\right)\left(2e^{2x}dx\right) - e^{2x}(2xdx)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2e^{2x}\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.7

Problema 3.7.1 Hallar dy si $y^3 + 3xy + x^3 = 4$

Solución

Aplicando las propiedades de la diferencial enunciadas en el teorema 3.7.1, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(y^3) + d(3xy) + d(x^2) = d(4) &\Rightarrow 3y^2dy + 3xdy + 3ydx + 3x^2dx = 0 \\ &\Rightarrow 3\left(y^2 + x\right)dy = -3\left(x^2 + y\right)dx \\ &\Rightarrow dy = -\frac{x^2 + y}{y^2 + x}dx \end{aligned}$$

Problema 3.7.2 Si A es el área de un cuadrado de lado x; es decir, $A = x^2$:

a. hallar ΔA, dA y $\Delta A - dA$

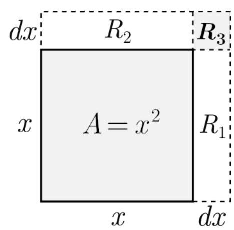
b. mostrar gráficamente a: A, ΔA, dA y $\Delta A - dA$

Solución

a. $\Delta A = (x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2$

$dA = 2xdx$, $\Delta A - dA = (dx)^2$

b. Dibujemos los cuadrados de lados x y $(x + dx)$.



Las áreas de los rectángulos formados son:

$$R_1 = xdx,\ R_2 = xdx \quad \text{y} \quad R_3 = (dx)^2$$

Luego:

$$\Delta A = 2xdx + (dx)^2 = R_1 + R_2 + R_3$$

$$dA = 2xdx = xdx + xdx = R_1 + R_2$$

$$\Delta A - dA = R_3$$

Problema 3.7.3 Aproximar el valor de $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+0.08\right)$ mediante:

a. aproximación lineal. **b.** aproximación con la diferencial.

Solución

Sea $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$. Se tiene que:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}2x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

a. Sabemos que: $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$

Tomando $a=\frac{\pi}{4}$, se tiene:

$$f(x)\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+1\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Luego, la aproximación lineal de $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ en $a=\frac{\pi}{4}$ es:

$$\operatorname{sen}^2 x\approx x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

Ahora, para $x=\frac{\pi}{4}+0.08$, se tiene:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+0.08\right)\approx\left(\frac{\pi}{4}+0.08\right)+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+0.08=0.508$$

b. Sabemos que: $f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy=f(x)+f'(x)dx$.

Luego, para $x=\frac{\pi}{4}$ y $dx=\Delta x=0.08$, se tiene:

$$f\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{2}+1(0.08)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+0.08\right)\approx\frac{1}{2}+1(0.08)=0.508$$

Problema 3.7.4

Se quiere calcular el volumen de un cubo a partir de su arista, de tal forma que el margen de error sea de 6 %. Estime el margen de error porcentual con que debe medirse la arista.

Solución

Si V es volumen del cubo, y x es la arista, entonces:

$$V = x^3, \qquad dV = 3x^2dx, \qquad \text{y} \qquad \frac{dV}{V} = \frac{3x^2dx}{x^3} = 3\frac{dx}{x}$$

Luego:

$$\left|100\frac{dV}{V}\right| \leq 6 \Rightarrow \left|100\left(3\frac{dx}{x}\right)\right| \leq 6 \Rightarrow \left|100\frac{dx}{x}\right| \leq 2$$

Por lo tanto, el margen de error porcentual de la arista debe ser de 2 %.

Problema 3.7.5

El periodo de un péndulo es el tiempo que este demora para dar una oscilación completa. Este viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

donde L es la longitud del péndulo, g es la aceleración de la gravedad y T se mide en segundos. Si se tiene un péndulo de un reloj que se ha dilatado debido al calor, aumentando su longitud en un 0.4 %, calcular:

a. el porcentaje aproximado del cambio del periodo.

b. el error aproximado del reloj en un día.

Solución

a. Nos dice que: $100\frac{dL}{L} = 0.4$. Además:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \Rightarrow dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left(\frac{dL}{2\sqrt{L}}\right) = \frac{\pi dL}{\sqrt{g}\sqrt{L}}$$

Luego:

$$100\frac{dT}{T} = 100\frac{\dfrac{\pi dL}{\sqrt{g}\sqrt{L}}}{\dfrac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}}} = 100\frac{dL}{2L} = \frac{1}{2}\left(100\frac{dL}{L}\right) = \frac{1}{2}(0.4) = 0.2\,\%$$

b. En cada segundo, el reloj tiene un error aproximado del 0.2 %, es decir, de 0.002 segundos. Luego, en un día, el error aproximado es de:

$$24(60)(60)(0.002) = 172.8 \text{ segundos } = 2.88 \text{ minutos.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.7

En los problemas del 1 al 3, hallar: a. Δy **b.** dy **c.** $\Delta y - dy$

1. $y = x^2 - 1$ **2.** $y = e^x$ **3.** $y = lnx$

En los problemas del 4 y 5, calcular: a. Δy **b.** dy **c.** $\Delta y - dy$**, para los valores de** x **y** dx **dados.**

4. $y = x^2 - 4x,\ x = -1,\ dx = 0.03$ **5.** $y = 10^x,\ x = 1,\ dx = -0.01$

En los problemas del 6 al 9, se indican aproximaciones lineales de la funciones dadas en $a = 0$**. Verificar que estas aproximaciones son correctas.**

6. $\sqrt{x+3} \approx \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}x$ **7.** $\operatorname{sen} x \approx x$

8. $\tan x \approx x$ **9.** $e^x \approx 1 + x$

En los problemas del 10 al 15, hallar dy**.**

10. $y = e^{-3x^2}$ **11.** $y = \sqrt{1 - x^2}$ **12.** $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

13. $x^2 + y^2 = 25$ **14.** $x^2 + 2\sqrt{xy} - y^2 = 1$ **15.** $y = \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}$

16. Probar que, para valores pequeños de $|\ \Delta x\ |$, se cumple que:

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

En los problemas del 17 al 22, hallar un valor aproximado de la expresión indicada.

17. $\sqrt{80}$ **18.** $\sqrt[4]{82}$ **19.** $\sqrt[3]{218}$

20. $\sqrt{2 + \sqrt[3]{8.2}}$ **21.** $\tan^{-1}\left(e^{0.08}\right)$ **22.** $\ln 1.07$

23. Aproximar el valor de $\cos^4\left(\frac{\pi}{4} + 0.01\right)$.

24. Aproximar el valor de $\operatorname{sen}(60°\ 1')$. *Sugerencia:* $60°\ 1' = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{60}\left(\frac{\pi}{180}\right)$.

25. Si cubo de metal tiene 12 *cm* de arista, y esta aumenta en 0.2 *cm*:

a. aproximar con la diferencial el incremento del volumen.

b. hallar el valor exacto del incremento.

c. aproximar con la diferencial el incremento del área total.

d. hallar el incremento exacto del área total.

26. Se tiene un tubo de hierro de 8 metros de largo, 6 centímetros de radio y 0.4 centímetros de espesor. Usando la diferencial, aproximar el volumen de hierro del tubo. El volumen de un cilindro circular recto es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h la altura.

27. Se quiere calcular el área A de una esfera a partir del radio r mediante la fórmula $A = 4\pi r^2$, y que el margen de error sea de 5 %. Estimar el margen de error porcentual con que debe medirse el radio.

28. Al medir el radio de una esfera se obtiene 4 metros. So esta medida es segura hasta 0.01 metros, estimar:

a. el margen de error al calcular el volumen de la esfera.

b. el margen de error porcentual.

29. Si al medir una circunferencia mayor de una esfera se obtiene 72 centímetros, con un margen de error de 0.5 centímetros, estimar:

a. el margen de error al calcular el área de la esfera($A = 4\pi r^2$).

b. el margen de error relativo al calcular el área.

c. el margen de error al calcular el volumen de la esfera ($V = (\frac{4}{3})\pi r^3$).

d. el margen de error relativo al calcular el volumen.

Sugerencia: $C = 2\pi r \quad y \quad dC = 2\pi dr$.

30. Un cateto de un triángulo rectángulo mide exactamente 30 centímetros. Si al medir el ángulo opuesto a este cateto se obtiene 60°, con un margen de error de 0.5°, estimar:

a. el margen de error al calcular la hipotenusa.

b. el margen de error porcentual al calcular la hipotenusa.

31. Se estima que el próximo mes se venderán 8,000 unidades de cierto producto. Esta estimación tiene un margen de error de 3 %, y la función ganancia es:

$$G(x) = 5x - 0.0002x^2 \text{ dólares,}$$

donde x es el número de unidades vendidas por mes.

a. Calcular la ganancia que dejarán los 8,000 artículos.

b. Estimar el margen de error de la ganancia con el cálculo anterior.

c. Estimar el margen de error relativo.

d. Estimar el margen de error porcentual.

4

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Guillaume François Antoine, Marques de L'Hôpital (1661-1704)

GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE, también conocido como el *Marqués de L'Hôpital*, nació en París en el año 1661, dentro de una familia noble y acomodada. En su juventud pretendió hacer una carrera militar; sin embargo, debido a su corta visión, abandonó su pretensión para dedicarse a la Matemática. Fue discípulo y amigo del famoso matemático de aquella época, el suizo, *Johann Bernoulli* (1667-1748).

En 1692 publicó el primer libro de cálculo de la historia, *Analyse des Infiniment petit* (Análisis de los infinitamente pequeños), donde aparece un novedoso método para calcular el límite de un cociente, donde los límites del numerador y del denominador son nulos. Este método lo hizo famoso gracias a que le fue conferido el nombre de **Regla de L'Hôpital**. Su maestro, Bernoulli, reveló que la mayoría de los descubrimientos de la obra de L'Hôpital eran suyos, incluyendo la famosa regla. Pese a que L'Hôpital nunca se adjudicó su autoría, la veracidad de la afirmación de Bernoulli recién fue comprobada en 1922, cuando se encontró un texto en la biblioteca de Berna del curso de Cálculo que dictaba Bernoulli, en el que hace uso de esta regla.

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Durante la vida de L'Hôpital sucedieron varios hechos notables en América y el mundo hispano. La poetisa mejicana *Sor Inés de la Cruz* (1651-1695) publica sus obras poéticas, fuertemente influenciadas por el Gongorismo. En 1664, los ingleses, bajo el mando del *Duque de York*, toman Nueva Amsterdam y le cambian el nombre a Nueva York. En 1671, el pirata inglés *Henry Morgan* saquea e incendia la ciudad de Panamá. En 1682, el cuáquero *Willian Penn* funda Pensilvania. Ese mismo año, el francés *Robert Cavalier de la Salle* llega a la desembocadura del río Misisipi, toma posesión de la región y la nombra Luisiana, en honor a su rey, Luis XIV.

SECCION 4.1

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La optimización está presente en casi todos los oficios de la humanidad. Por ejemplo, el comerciante busca maximizar sus ganancias, el industrial busca minimizar sus costos de producción y los transportistas buscan la distancia o el tiempo mínimo en un recorrido. La solución a muchos de estos problemas se reduce a encontrar el valor máximo o el valor mínimo de una función, ya que estos son **problemas de optimización**.

EXTREMOS ABSOLUTOS

Definición Sea $\boldsymbol{c}$ un punto del dominio de la función f. Diremos que:

a. $\boldsymbol{f(c)}$ es **el valor máximo de** $\boldsymbol{f}$, el máximo absoluto de f, o simplemente el máximo de f, si:

$$\boldsymbol{f(c) \geq f(x), \ \forall\, x \in \mathbf{Dom}(f)}$$

b. $\boldsymbol{f(c)}$ es el **valor mínimo de** $\boldsymbol{f}$, el mínimo absoluto de f, o simplemente el mínimo de f, si:

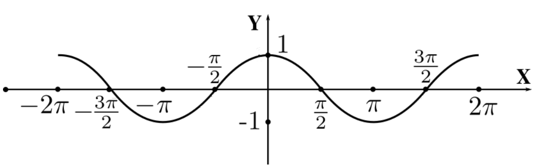
$$\boldsymbol{f(c) \leq f(x), \ \forall\, x \in \mathbf{Dom}(f)}$$

c. $\boldsymbol{f(c)}$ es un **valor extremo de** $\boldsymbol{f}$ si $f(c)$ es un máximo o un mínimo.

Ejemplo 4.1.1

a. El máximo de la función $f(x) = \cos x$ es 1, y el mínimo es -1. Estos valores son alcanzados infinitas veces, ya que, para todo entero n, se cumple que:

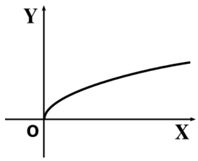
$$\cos 2n\pi = 1 \quad \text{y} \quad \cos(2n+1)\pi = -1$$



b. El mínimo de $g(x) = \sqrt{x}$ es $g(0) = \sqrt{0} = 0$; pero g no tiene máximo.

c. El máximo de $h(x) = 1 - x^2$ es $h(0) = 1$; pero h no tiene mínimo.

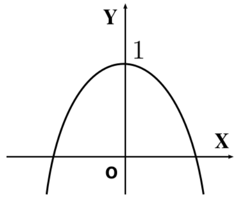
d. La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no tiene máximo ni mínimo.



$g(x) = \sqrt{x}$

Max = No tiene

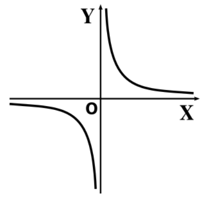
Min = 0



$h(x) = 1 - x^2$

Max = 1

Min = No tiene



$f(x) = \dfrac{1}{x}$

Max = No tiene

Min = No tiene

Los ejemplos anteriores nos muestran que algunas funciones tienen los dos valores extremos, mientras que otras sólo tienen uno, o ninguno, así que necesitamos algún criterio que nos garantice la existencia de estos extremos.

A continuación, presentamos uno de los más simples, conocido como el *teorema del valor extremo*. Lamentablemente, su demostración sobrepasa el alcance de este texto, por lo cual será omitida.

Teorema 4.1.1 **Teorema del valor extremo.**

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene máximo y mínimo en $[a, b]$. Es decir, existen dos puntos, c y d, en el intervalo $[a, b]$, tales que $f(c)$ es el valor máximo y $f(d)$ es el valor mínimo de f.

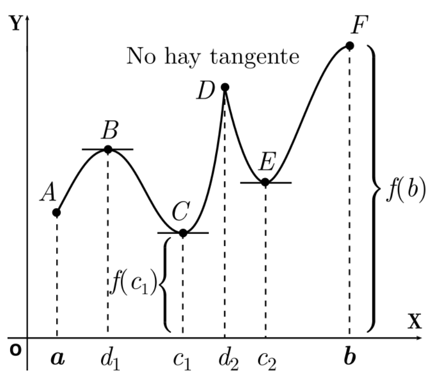
Ejemplo 4.1.2

El siguiente gráfico es el de una función continua f, en el intervalo cerrado $[a, b]$. Determine el máximo y mínimo de la función.

Solución

El punto más alto del gráfico es el punto F; el más bajo es el punto C.

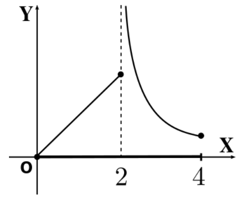
Luego, el máximo de f es $f(b)$, y el mínimo es $f(c_1)$.



Ejemplo 4.1.3

Hallar una función que tenga, por dominio, un intervalo que sea cerrado y no tenga máximo.

Solución



$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2}, & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

El dominio es $[0,\ 4]$ y, además, f no tiene máximo. Observe que f no cumple la hipótesis del teorema del valor extremo, ya que es discontinua en 2.

EXTREMOS RELATIVOS

En el gráfico del ejemplo 4.1.2 podemos apreciar que los puntos B y D, a pesar de no ser los puntos más altos del gráfico, son los más altos comparados con los puntos vecinos, mientras que los puntos A y E son los más bajos de su vecindario. Esta observación nos conduce al concepto de *extremos locales o extremos relativos.*

Definición Si c es un punto del dominio de la función f, diremos que:

a. $\boldsymbol{f(c)}$ es un **máximo local** o un **máximo relativo** de $\boldsymbol{f}$ si existe un intervalo abierto I que contiene a c, y además, se cumple que:

$$\boldsymbol{f(c) \geq f(x),\ \forall\, x \in I}$$

b. $\boldsymbol{f(c)}$ es un **mínimo local** o un **mínimo relativo** de $\boldsymbol{f}$ si existe un intervalo abierto I que contiene a c, y además, se cumple que:

$$\boldsymbol{f(c) \leq f(x),\ \forall x \in I}$$

c. $\boldsymbol{f(c)}$ es un **extremo local** o un **extremo relativo** de $\boldsymbol{f}$ si $f(c)$ es un máximo local o un mínimo local.

Observe que, de acuerdo a esta definición, c es un punto interior del intervalo $[a,\ b]$, es decir, $a < c < b$. Observe también que si $f(c)$ es extremo absoluto en un intervalo $[a,\ b]$, y si $a < c < b$, entonces $f(c)$ también es un extremo local. Esto no sucede si $f(a)$ o $f(b)$ es un extremo absoluto.

Con solo ver los puntos B, C, D, y E en la gráfica del ejemplo 4.1.2, los cuales corresponden a extremos locales, se puede conjeturar que, en estos puntos, las rectas tangentes son horizontales (pendiente nula), o no existen rectas tangentes (la derivada no existe). Esta conjetura la formalizamos y demostramos en la siguiente definición.

Definición

Un **número crítico** de una función $\boldsymbol{f}$ es un número $\boldsymbol{c}$ en el dominio de f, tal que $\boldsymbol{f'(c) = 0}$ o $\boldsymbol{f'(c)}$ no existe. En este caso, el punto $\boldsymbol{(c,\ f(c))}$ es un **punto crítico**.

Teorema 4.1.2 **Teorema de Fermat**

Si f tiene un extremo local en c, entonces c es un número crítico.

Demostración

Si $f'(c)$ no existe, el teorema se cumple. Ahora, supongamos que $f'(c)$ existe:

Caso 1. $\boldsymbol{f(c)}$ **es máximo local**.

Como existe $f'(c)$, debemos tener que:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \tag{1}$$

Por ser $f(c)$ un máximo local, existe un intervalo abierto I que contiene a c, tal que, para los $c+h$ que están en el intervalo I, se cumple:

$$f(c+h) \leq f(c) \qquad \text{por lo tanto} \qquad f(c+h) - f(c) \leq 0 \tag{2}$$

Luego, para $h > 0$, se tiene:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \tag{3}$$

Ahora, para $h < 0$, tomando en cuenta (2), se tiene:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \tag{4}$$

De (1), (3) y (4) obtenemos que $f'(c) = 0$.

Caso 2. $\boldsymbol{f(c)}$ **es mínimo local.**

Sea $g(x) = -f(x)$. Como $f(c)$ es un valor mínimo de f, entonces:

$$g(c) = -f(c) \text{ es máximo de } g$$

Por el caso 1, $g'(c) = 0$. Por lo tanto:

$$f'(c) = -g'(c) = -0 = 0$$

Observación

La proposición recíproca al teorema de Fermat no es cierta. En efecto, los siguientes dos ejemplos son contraejemplos.

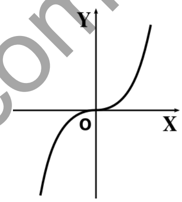
Ejemplo 4.1.4 Dada la función: $f(x) = x^3$:

- demostrar que 0 es número crítico.
- observar que $f(0) = 0$ no es un extremo local.

Solución

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

Luego, 0 es número crítico de f.



Observando el gráfico podemos apreciar que f no tiene un extremo local en 0.

Ejemplo 4.1.5 Hallar los números críticos de la función:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$$

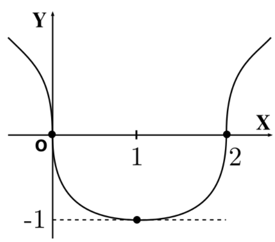
Solución

Hallemos la derivada de f:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x} \Rightarrow f(x) = \left(x^2 - 2x\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2x\right)^{-2/3}(2x - 2)$$

$$= \frac{2}{3}\frac{x - 1}{\left(x(x - 2)\right)^{2/3}}$$



Ahora,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Además, vemos que $f'(x)$ no está definida en $x = 0$ ni en $x = 2$. Luego, los números críticos de f son 1, 0 y 2.

Observe en el gráfico que $f(1) = -1$ es un mínimo local, y absoluto. Sin embargo, ni $f(0) = 0$, ni $f(2) = 0$ son extremos locales.

ESTRATEGIA PARA HALLAR LOS VALORES EXTREMOS EN INTERVALOS CERRADOS FINITOS

De los dos teoremas 4.1.1 y 4.1.2 obtenemos la siguiente estrategia para hallar los valores extremos de una función continua f, en un intervalo $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$.

Paso 1. Hallar los puntos críticos de f en el intervalo $[a,\ b]$.

Paso 2. Evaluar f en a, en b y en los puntos críticos.

El mayor de los valores del paso 2 es el máximo. El menor es el mínimo.

Ejemplo 4.1.6 Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 3$$

Hallar los extremos absolutos en el intervalo $[1,\ 9]$.

Solución

Paso 1. Hallar los puntos críticos de f en el intervalo $[1,\ 9]$:

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ \text{ o } \ x = 6$$

Por lo tanto, los puntos críticos de f son 2 y 6, y ambos están en $[1,\ 9]$

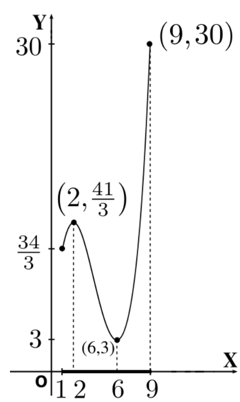
Paso 2. Evaluamos f en la frontera de $[1,\ 9]$ y en los puntos críticos.

$$f(1) = \frac{1^3}{3} - 4(1)^2 + 12(1) + 3 = \frac{34}{3}$$

$$f(9) = \frac{9^3}{3} - 4(9)^2 + 12(9) + 3 = 30$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - 4(2)^2 + 12(2) + 3 = \frac{41}{3}$$

$$f(6) = \frac{6^3}{3} - 4(6)^2 + 12(6) + 3 = 3$$



Luego, el máximo es $f(9) = 30$, y el mínimo es $f(6) = 3$.

Ejemplo 4.1.7 Hallar los extremos de la siguiente función:

$$g(x) = 3 - \sqrt[3]{(x-3)^2} \quad \text{en el intervalo } [0,\ 4].$$

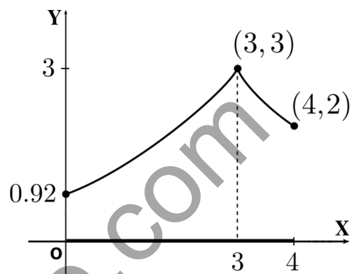
Solución

Paso 1. Hallemos los puntos críticos de g en el intervalo $[0,\ 4]$:

$$g(x) = 3 - (x-3)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{2}{3}(x-3)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}}$$



g' no está definida en $x = 3$, y no se anula en ningún punto. Luego, g tiene un único punto crítico que es 3, y está en el intervalo $[0,\ 4]$.

Paso 2. Evaluamos g en la frontera de $[0,\ 4]$ y en los puntos críticos:

$$g(0) = 3 - \sqrt[3]{(0-3)^2} = 3 - \sqrt[3]{9} \approx 0.9199$$

$$g(4) = 3 - \sqrt[3]{(4-3)^2} = 3 - 1 = 2$$

$$g(3) = 3 - \sqrt[3]{(3-3)^2} = 3$$

Luego, el máximo es $g(3) = 3$, y el mínimo, $g(0) = 3 - \sqrt[3]{9} \approx 0.9199$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.1

En los problemas del 1 al 8, determinar el máximo y mínimo absolutos de la función dada con solo observar el gráfico. Puede usar técnicas de traslación y reflexión para graficar (sección 4.1. del libro Precálculo para Todos).

1. $f(x) = 4 - x^2$

2. $g(x) = |\ 2 - x\ | - 1$

3. $h(x) = |\ 4 - x^2\ |$

4. $f(x) = -x^3 - 2$

5. $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, en $(1,3)$

6. $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, en $\left[\frac{4}{3},\ 3\right]$

7. $h(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{si } x < 1 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
En [-4, 4]

8. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & \text{si } x < 1 \\ 4 - x^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
En [-1, 2]

En los problemas del 9 al 14, hallar los números críticos de la función dada.

9. $f(x) = x^2(3x-8)^{\frac{2}{3}}$

10. $g(x) = x + \operatorname{sen} x$

11. $h(x) = \mid x^3 - 8 \mid$

12. $f(x) = \lfloor x \rfloor$

13. $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

14. $g(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x$
En $[-1,\ 2\pi)$

En los problemas del 15 al 22, determinar el máximo y el mínimo absolutos de la función en el intervalo cerrado indicado.

15. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ en [1, 3]

16. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ en [-2, 3]

17. $f(x) = \tan x - x$ en $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$

18. $f(x) = 1 - (x-3)^{\frac{2}{3}}$ en [-5, 4]

19. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ en $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$

20. $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen} x$ en $[0,\ \pi]$

21. $g(x) = \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} x$ en $[0,\ 2\pi]$

22. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ en [1, e]

23. Probar que la función cuadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$$

tiene exactamente un número crítico en $\mathbb{R}$.

24. Probar que la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, puede tener dos, uno o ningún número crítico en $\mathbb{R}$. *Sugerencia: ¿Cuántas raíces puede tener una ecuación de segundo grado?.*

25. Probar que un polinomio de grado n puede tener a lo más $n-1$ números críticos en $\mathbb{R}$.

SECCION 4.2

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Definición Si f es una función, diremos que:

a. $\boldsymbol{f}$ **es diferenciable** en un **intervalo abierto** $\boldsymbol{(a,\, b)}$ si es diferenciable en todo punto de $(a,\, b)$. Esto es:

$$\exists\, \boldsymbol{f'(x)},\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{(a,\, b)}$$

b. $\boldsymbol{f}$ **es diferenciable** en un **intervalo cerrado** $\boldsymbol{[a,\, b]}$ si es diferenciable en el intervalo abierto $(a,\, b)$, y tiene derivada por la derecha en $\boldsymbol{a}$, y por la izquierda en $\boldsymbol{b}$.

Por supuesto, también existe diferenciabilidad para intervalos semiabiertos, cuya definición es más que obvia.

Es fácil ver que, si f es diferenciable en un intervalo I, f es continua en I.

Teorema 4.2.1 **Teorema de Rolle.**

Si f es una función que cumple los siguientes criterios:

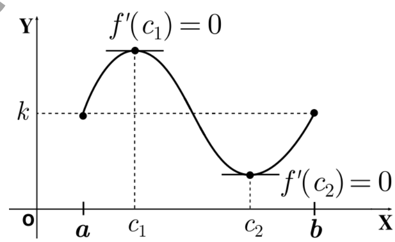
1. f es continua en el intervalo cerrado $[a,\, b]$.

2. f es diferenciable en el intervalo abierto $(a,\, b)$.

3. $f(a) = f(b)$

Entonces:

$$\exists\, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{(a,\, b)} \text{ tal que } \boldsymbol{f'(c) = 0}$$



Demostración

Sea $f(a) = f(b) = k$

Caso 1. f es la función constante $f(x) = f(a) = f(b) = k$, $\forall x \in [a,\, b]$.

En este caso, tenemos que $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,\, b)$. Por lo tanto, cualquier número $c \in (a,\, b)$ cumple con $f'(c) = 0$.

Caso 2. f no es constante. Luego, existe $x_0 \in [a,\, b]$ tal que $f(x_0) \neq k$.

Como f es continua en el intervalo cerrado $[a,\, b]$, por el teorema del valor extremo, f tiene máximo y mínimo en $[a,\, b]$.

Si $f(x_0) > k$ y $f(c_1)$ es el máximo de f en $[a,\, b]$, entonces:

$$f'(c_1) = 0 \quad \text{y} \quad f(c_1) \geq f(x_0) > k$$

Luego:

$$c_1 \neq a \ \text{ y } \ c_1 \neq b, \ \text{ por lo tanto }, \ c_1 \in (a,\, b)$$

Si $f(x_0) < k$ y $f(c_2)$ es el mínimo de f en $[a,\, b]$, entonces:

$$f'(c_2) = 0 \quad \text{y} \quad f(c_2) \leq f(x_0) < k$$

Luego:

$$c_2 \neq a \ \text{ y } \ c_2 \neq b, \ \text{ por lo tanto}, \ c_2 \in (a,\, b)$$

¿Sabías esto?

MICHEL ROLLE *(1652-1719), de origen Francés, fue un modesto escribano de notarías y entusiasta de la matemática. Fueron muchas sus contribuciones al Álgebra y a la Geometría, pero es más conocido por el teorema que ahora lleva su nombre, el cual apareció en su libro* ***Traité d'algèbra*** *(1690). En 1699 fue electo como miembro de la Real Academia de Ciencias.*

Teorema 4.2.2 **Teorema del Valor Medio (de Lagrange)**

Si f una función que cumple los siguientes criterios:

a. f es continua en el intervalo cerrado $[a,\, b]$.

b. f es diferenciable en el intervalo abierto $(a,\, b)$

Entonces $\exists\, \boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b})$, tal que:

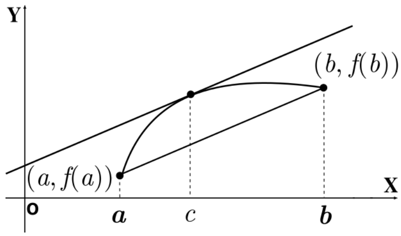
$$\boldsymbol{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)} \quad \text{o bien} \quad \boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Geométricamente, este teorema nos dice que la recta secante que pasa por los puntos $P_1 = (a,\, f(a))$ y $P_2 = (b,\, f(b))$ tiene por pendiente:

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La pendiente de la recta tangente en el punto $(c,\ f(c))$ es $f'(c)$.

El teorema señala que, si el gráfico de una función continua tiene una tangente en cada punto, entre a y b, entonces existe por lo menos un c, entre a y b, tal que la recta tangente en el punto $(c,\ f(c))$ es paralela a la recta secante.



Demostración

La recta que pasa por $P_1 = (a,\ f(a))$ y $P_2 = (b,\ f(b))$ tiene por ecuación:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Introducimos la nueva función $g(x)$ que es la diferencia entre la función f y la recta anterior:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

Ahora, vamos a comprobar que g satisface las hipótesis del teorema de Rolle:

1. La función g es continua en $[a,\ b]$, ya que g es la suma de dos funciones continuas en $[a,\ b]$, que son f y el polinomio:

$$p(x) = -f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

2. La función g es diferenciable en $(a,\ b)$, ya que f y el polinomio $p(x)$ también lo son. Además:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{i}$$

3. $g(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$

$g(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$

Las hipótesis del teorema de Rolle se han cumplido.

Luego, $\exists\, c \in (a,\, b)$ tal que:

$$g'(c) = 0 \tag{ii}$$

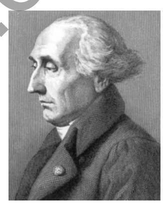
Si tomamos $x = c$ en (i), obtenemos:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{iii}$$

De (ii) y (iii), se tiene:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

¿Sabías esto?



JOSEPH LOUIS LAGRANGE *(1736-1813), originario de Turín (Italia), pero de ascendencia francesa, es uno de los dos matemáticos más notables del siglo XVIII, junto a Leonardo Euler. A los 19 años inventó el* ***Cálculo de Variaciones*** *y eventualmente tomó el lugar de Euler en la dirección de la Academia de Ciencias de Berlín.*

Fue profesor fundador en la ***Escuela Normal*** *y la* ***Escuela Politécnica*** *en su país natal. Además, formó parte de la comisión que estableció el Sistema Métrico Decimal en 1793. En 1778 publicó su obra magistral,* ***Mecánica Analítica****, dando origen a la* ***Mecánica Lagrangiana****.*

Ejemplo 4.2.1

Hallar todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para la siguiente función f, en el intervalo $[-1,\, 1]$:

$$f(x) = 1 + x + x^2 - 2x^3$$

Solución

En primer lugar, vemos que la función f, por ser un polinomio, es continua y diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo [-1, 1].

Ahora bien, nos piden encontrar los $c \in (-1,\, 1)$ tales que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \tag{1}$$

Pero,

$$f(-1) = 3, \quad f(1) = 1 \quad \text{y} \quad f'(x) = 1 + 2x - 6x^2$$

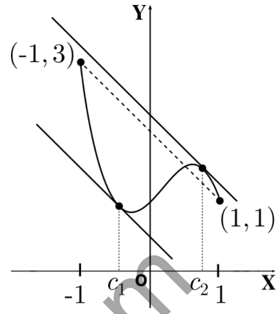
Luego, reemplazando estos valores en (1):

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \Rightarrow 1 + 2c - 6c^2 = \frac{1 - 3}{2}$$

$$\Rightarrow 2 + 2c - 6c^2 = 0 \Rightarrow 3c^2 - c - 1 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \approx -0.434,$$

$$c_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \approx 0.768$$



Vemos que ambas raíces están en el intervalo (-1, 1).

En términos de velocidades, el teorema del valor medio señala que, en algún instante, la velocidad promedio coincide con la instantánea. El siguiente ejemplo pone en manifiesto esta situación.

Ejemplo 4.2.2

Dos módulos policiales, A y B, están separados por una distancia de 147 kilómetros. Un automóvil transita frente al módulo A a las 2 P.M. y frente al módulo B a las 3:30 P.M. En el módulo B, un oficial de tránsito *con conocimientos de Cálculo* le indicó al conductor que este había excedido la velocidad máxima permitida de 90 km/h; por lo que procedería a levantar una infracción. Demuestre que el oficial tenía razón.

Solución

Si $s = f(t)$ es la función de desplazamiento del conductor, donde medimos el tiempo en horas a partir de las 12 del medio día y, además, suponemos que f es diferenciable, entonces la derivada $f'(t)$ es la velocidad instantánea en el instante t.

La velocidad promedio del automóvil en el recorrido comprendido entre los dos módulos es:

$$\frac{f(3.5) - f(2)}{3.5 - 2} = \frac{147}{1.5} = 98\, km/h$$

Pero, por el teorema del valor medio, existe un instante t_0 entre las 2 P.M. y las 3:30 P.M. tal que:

$$\frac{f(3.5) - f(2)}{3.5 - 2} = f'(t_0) \Rightarrow f'(t_0) = 98\, km/h$$

Luego, el conductor excedió la velocidad permitida en el instante t_0.

Una aplicación importante del teorema del valor medio es el siguiente resultado, en el cual hablamos de un intervalo I. Este intervalo puede ser de cualquier tipo: abierto, cerrado, semiabierto, infinito, etc.

Teorema 4.2.3 **Teorema de la Constante.**

Sea f una función continua en un intervalo I,

$$\boldsymbol{f'(x) = 0,\ \forall\, x \in I \Leftrightarrow f(x) = C,\ \forall\, x \in I,}$$

donde C es una constante.

Demostración

Una parte del teorema ya no novedad, dado que ya sabemos que si f es una función constante, entonces su derivada es la función constante 0; por lo tanto, vamos a centrarnos en probar la parte recíproca.

Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera del intervalo I tales que $x_1 < x_2$. Por hipótesis, $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$. En particular, $f'(x) = 0$ para todo x en $[x_1,\, x_2]$. Luego, f es diferenciable en $[x_1,\, x_2]$ y, por el teorema 4.1.1, f también es continua en $[x_1,\, x_2]$.

Han sido satisfechas las hipótesis del teorema del valor medio. Luego, existe $c \in (x_1,\, x_2)$ tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Pero, $f'(c) = 0$. Luego:

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

Si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera de I, entonces f es constante en I.

Ejemplo 4.2.3 Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

Solución

Sea $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x$. Se tiene:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Luego, por el teorema anterior, existe una constante C tal que $f(x) = C$.

Hallemos esta constante. Tomando $x = 0$ se tiene:

$$C = f(0) = \operatorname{sen}^{-1} 0 + \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Luego:

$$\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

Teorema 4.2.4 **Teorema de la Diferencia Constante.**

Sean f y g dos funciones diferenciables en un intervalo I.

$$\boldsymbol{f'(x) = g'(x),\ \forall\, x \in I \Rightarrow f(x) = g(x) + C,\ \forall\, x \in I,}$$

donde C es una constante.

Demostración

Si $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces la función h es diferenciable en I, ya que f y g lo son. Además:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,\ \forall\, x \in I$$

Luego, por el teorema 4.2.3, existe una constante C tal que:

$$h(x) = C,\ \forall\, x \in I \Rightarrow f(x) - g(x) = C,\ \forall\, x \in I \Rightarrow f(x) = g(x) + C,\ \forall\, x \in I$$

En la misma línea del teorema de Rolle y del teorema del valor medio contamos con el siguiente teorema que generaliza a los dos anteriores.

Teorema 4.2.5 **Teorema del Valor Medio de Cauchy.**

Sea f y g dos funciones tal que:

1. f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a,\, b]$.

2. f y g son diferenciables en el intervalo abierto $(a,\, b)$

Entonces $\exists\, \boldsymbol{c \in (a,\, b)}$ tal que:

$$\boldsymbol{(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)}$$

Si $\boldsymbol{g(a) \neq g(b)}$, entonces la igualdad anterior puede escribirse así:

$$\boldsymbol{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

Demostración

Ver el problema resuelto 4.2.9.

El Teorema del Valor Medio es un caso particular del teorema de Cauchy, ya que si tomamos $g(x) = x$ en el teorema de Cauchy, tenemos que:

$$g(b) - g(a) = b - a \quad \text{y} \quad g'(c) = 1$$

Si reemplazamos estas igualdades en la igualdad anterior, obtenemos la igualdad del Teorema del Valor Medio.

Ejemplo 4.2.4

Dadas las funciones, $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, hallar un $c \in (0, 1)$ que satisfaga el teorema de Cauchy para f y g, en el intervalo $[0, 1]$.

Solución

Es evidente que f y g son continuas en $[0, 1]$ y diferenciables en $(0, 1)$. Ahora:

$$\begin{aligned}
(f(2) - f(1))g'(c) = (g(2) - g(1))f'(c) &\Rightarrow \left(2^2 - 1^2\right)\left(3c^2\right) = \left(2^3 - 1^3\right)(2c) \\
&\Rightarrow 9c^2 = 14c \Rightarrow c(9c - 14) = 0 \\
&\Rightarrow c = 0 \quad \text{o} \quad c = \frac{14}{9} \\
&\Rightarrow c = \frac{14}{9} \qquad (0 \notin (0, 1))
\end{aligned}$$

¿Sabías esto?

Augustin Cauchy *(1789-1857), nacido en París, Francia, es una de las dos mentes matemáticas más prominentes del siglo XIX, junto a Johann Friedrich Gauss (1777-1855). Su apellido suena con frecuencia en el ámbito científico debido a la gran cantidad de aportes que realizó áreas muy diversas de la matemática. Una de sus contribuciones más destacables en el análisis matemático fue reconstruir sus fundamentos sobre la base de los* ***límites****.*

PROBLEMAS RESUELTOS 4.2

Problema 4.2.1

Probar que la siguiente ecuación tiene exactamente una raíz real:

$$x^3 + 3x - 2 = 0$$

Solución

Sea $f(x) = x^3 + 3x - 2$. Por ser un polinomio, esta función es diferenciable; por lo tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$. Además:

$$f(0) = -2 \quad \text{y} \quad f(1) = 2$$

Por el teorema del valor medio, existe un a en el intervalo $[0,\, 1]$ tal que:

$$f(a) = 0 \Rightarrow a^3 + 3a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a \text{ es una raíz de la ecuación } x^3 + 3x - 2 = 0$$

Ahora, por reducción al absurdo, probaremos que a es la única raíz.

Supongamos que b es otra raíz de la ecuación, entonces debemos tener que $f(b) = 0$. Ahora supongamos que $a < b$, entonces la función f satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a,\, b]$. Luego, existe un c en $(a,\, b)$ tal que:

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3c^2 = -3 \Rightarrow c^2 = -1$$

Pero $c^2 \neq -1$, ya que $c^2 > 0$. Esto demuestra que no existe tal b.

Problema 4.2.2

Usando el teorema de Rolle, probar que un polinomio grado 2:

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

tiene, a lo más, dos raíces reales.

Solución

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $P(x)$ tiene tres raíces distintas, $x_1,\, x_2$ y x_3. Es decir:

$$P(x_1) = 0, \quad P(x_2) = 0 \quad \text{y} \quad P(x_3) = 0$$

El polinomio satisface las hipótesis del teorema de Rolle en cada uno de los intervalos $[x_1,\, x_2]$ y $[x_2,\, x_3]$. Por lo tanto:

$$\exists\, c_1 \in (x_1,\, x_2) \;\text{ y }\; \exists\, c_2 \in (x_2,\, x_3) \;\text{ tales que }\; P'(c_1) = 0 \;\text{ y }\; P'(c_2) = 0.$$

Esto significa que el polinomio $P'(x) = 2ax + b$ tiene dos raíces. Pero esto es imposible, ya que $P'(x)$ es un polinomio de primer grado y tiene una única raíz, que es $x = -\frac{b}{2a}$.

Problema 4.2.3

Probar que el siguiente polinomio tiene, a lo más, una raíz real:

$$P(x) = x^{2n+1} + ax + b, \qquad \text{con } a > 0$$

Solución

Supongamos que $P(x)$ tiene 2 dos raíces reales, x_1 y x_2, y que $x_1 < x_2$. Se tiene que:

$$P(x_1) = 0 \quad \text{y} \quad P(x_2) = 0$$

Por el teorema de Rolle, existe $c \in (x_1,\, x_2)$ tal que $P'(c) = 0$. Pero:

$$P'(x) = (2n+1)x^{2n} + a \quad \text{y} \quad P'(x) = 0 \Rightarrow x^{2n} = -\frac{a}{2(n+1)}$$

Dado que $a > 0$, esta ecuación no tiene raíces reales; por lo tanto, $P'(c)$ es imposible. En consecuencia:

$$P(x) = x^{2n+1} + ax + b \quad \text{no puede tener dos raíces reales.}$$

Problema 4.2.4 Si f es diferenciable, $f(2) = -3$, y se cumple que:

$$1 < f'(x) < 8 \quad \text{si} \quad 2 < x < 7$$

Probar que: $2 < f(7) < 37$

Solución

Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[2,\, 7]$:

Existe $c \in (2,\, 7)$ tal que:

$$\frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = f'(c) \Rightarrow \frac{f(7) - (-3)}{5} = f'(c) \Rightarrow f(7) = -3 + 5f'(c) \qquad (1)$$

Pero:

$$\begin{aligned} 1 < f'(c) < 8 &\Rightarrow 5 < 5f'(c) < 40 && \text{(multiplicando por 5)} \\ &\Rightarrow 2 < -3 + 5f'(c) < 37 && \text{(sumando -3)} \\ &\Rightarrow 2 < f(7) < 37 && \text{(de (1))} \end{aligned}$$

Problema 4.2.5 Usando el teorema del valor medio, probar que:

$$\mathbf{sen}\, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \; \forall\, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

Solución

Caso 1. $x = 0$

Para este caso, la desigualdad se cumple trivialmente: $0 = \operatorname{sen} 0 \leq 0$.

Caso 2. $x > 0$

La función $f(x) = \operatorname{sen} x - x$, es diferenciable en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto, es diferenciable en el intervalo $[0,\, x]$.

Por el teorema del valor medio, existe un c en el intervalo $(0,\, x)$ tal que:

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \tag{1}$$

Pero:

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x, \quad f(0) = \operatorname{sen} 0 - 0 = 0 \quad \text{y} \quad f'(c) = \cos c - 1$$

Además:

$$\cos c - 1 \leq 0 \tag{2}$$

Reemplazando valores de $f(x)$, $f(0)$ y $f'(c)$, en (1), considerando (2):

$$\operatorname{sen} x - x - 0 = (\cos c - 1)x \leq 0x \Rightarrow \operatorname{sen} x - x \leq 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \leq x$$

Problema 4.2.6 Probar que:

a. $|\tan y - \tan x| \geq |y - x|$, $\forall x$, $\forall y$ en $\left(-\dfrac{\pi}{2},\, \dfrac{\pi}{2}\right)$

b. $|\tan y + \tan x| \geq |y + x|$, $\forall x$, $\forall y$ en $\left(-\dfrac{\pi}{2},\, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución

1. Si $x = y$, la desigualdad se cumple trivialmente.

Supongamos que $x < y$ (se procede en forma similar si $y < x$), entonces la función $f(\theta) = \tan \theta$ es diferenciable en $\left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$.

Luego, para x e y en este intervalo, por el teorema del valor medio, existe $c \in (x,\, y)$ tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \Rightarrow \tan y - \tan x = \sec^2 c(y - x)$$

$$\Rightarrow |\tan y - \tan x| = \left|\sec^2 c\right| |y - x| \geq |y - x| \qquad (\sec \theta \geq 1)$$

2. Si x está en $\left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$, $-x$ también lo está. Luego, por la parte **a**, reemplazando x por $-x$, y tomando en cuenta que función tangente es impar, se tiene:

$$\mid \tan y - \tan(-x) \mid \geq \mid y - (-x) \mid \Rightarrow \mid \tan y + \tan x \mid \geq \mid y + x \mid$$

Problema 4.2.7 Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$.

Probar que:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

Solución

Aplicando el teorema del valor medio a $f(x) = \ln x$ en $[a,\, b]$, tenemos:

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}, \text{ donde } a < c < b \qquad (1)$$

Pero:

$$0 < a < c < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a} \qquad \text{(de (1))}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

Problema 4.2.8 Probar que:

$$3\cos^{-1} x - \cos^{-1}\left(3x - 4x^3\right) = \pi, \text{ si } \mid x \mid \leq \frac{1}{2}$$

Solución

Derivamos la función $f(x) = 3\cos^{-1} x - \cos^{-1}(3x - 4x^3)$:

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3\left(1-4x^2\right)}{\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}} \qquad (1)$$

Se verifica fácilmente que 1 y -1 son raíces de $1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6$. Usando este resultado, logramos la factorización:

$$1-9x^2+24x^4-16x^6 = -(x-1)(x+1)(1-8x^2+16x^4) = \left(1-x^2\right)\left(1-4x^2\right)^2$$

Luego, regresando a (1):

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3\left(1-4x^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-4x^2\right)^2}} \\ &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3\left(1-4x^2\right)}{\left|1-4x^2\right|\sqrt{1-x^2}} \qquad (2) \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} &| \ x \ | \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -4x^2 \geq -1 \Rightarrow 1-4x^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \left|1-4x^2\right| = 1-4x^2 \end{aligned}$$

Ahora, regresando a (2):

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3\left(1-4x^2\right)}{\left|1-4x^2\right|\sqrt{1-x^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

En consecuencia, existe una constante C tal que $f(x) = C$. Pero:

$$C = f(0) = 3\cos^{-1} 0 - \cos^{-1} 0 = 3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

Luego:

$$3\cos^{-1} x - \cos^{-1}\left(3x - 4x^2\right) = \pi$$

Problema 4.2.9 Prueba del Teorema 4.2.5

Teorema del valor medio de Cauchy

Sean f y g dos funciones tal que:

1. f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$.

2. f y g son diferenciables en el intervalo abierto (a, b)

Entonces $\exists\, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{(a,\, b)}$ tal que:

$$\boldsymbol{(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)}$$

Si $\boldsymbol{g(a) \neq g(b)}$, entonces la igualdad anterior puede escribirse así:

$$\boldsymbol{\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

Solución

Construimos una función que satisfaga las hipótesis del teorema del valor medio. Esta función es:

$$h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x) \tag{1}$$

Como f y g son continuas en $[a,\, b]$ y diferenciables en $(a,\, b)$, la función h también cumple estas propiedades. Por el teorema del valor medio, existe un $c \in (a,\, b)$ tal que:

$$h(b) - h(a) = h'(c)(b - a) \tag{2}$$

Pero:

$$\begin{aligned}
h(b) &= (f(b) - f(a))\, g(b) - (g(b) - g(a))\, f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) \\
h(a) &= (f(b) - f(a))\, g(a) - (g(b) - g(a))\, f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \\
h'(x) &= (f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x) && (3)
\end{aligned}$$

Vemos que $h(b) = h(a)$, por lo tanto, de (1) y (3), obtenemos:

$$\begin{aligned}
h'(c)(b - a) = 0 &\Rightarrow h'(c) = 0 \\
&\Rightarrow (f(b) - f(a))\, g'(c) - (g(b) - g(a))\, f'(c) = 0 \\
&\Rightarrow (f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)
\end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.2

En los problemas del 1 al 4, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado. Hallar todos los puntos c que satisfacen la conclusión del teorema.

1. $f(x) = x^3 - 4x,\ [0,\, 2]$

2. $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x - 1,\ [0,\, 2\pi]$

3. $h(x) = 8x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}},\ [0,\, 8]$

4. $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}.\ [0,\, 4]$

En los problemas del 5 al 10, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo indicado. Hallar todos los puntos c que satisfacen la conclusión del teorema.

5. $f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ [-1,\, 0]$

6. $g(x) = \frac{1}{x} + x,\ [1,\, 2]$

7. $h(x) = 2 + \sqrt[3]{x - 1},\ [1,\, 9]$

8. $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right),\ [0,\, 1]$

9. $h(x) = \ln \cos x,\ \left[0,\, \frac{\pi}{3}\right]$

10. $g(x) = \tan^{-1} x,\ [-1,\, 1]$

11. Probar que la ecuación $x^5 + 10x + 4 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

12. Si $a > 0$, probar que la ecuación $x^3 + ax - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

13. Probar que $x^4 + 4x + b = 0$ tiene, a lo más, dos raíces reales.
Sugerencia: Si $f(x) = x^4 + 4x + b$. ¿Cuántas raíces tiene $f'(x) = 0$?

14. Si a y b son constantes y n un natural, probar que la siguiente ecuación tiene, a lo más, tres raíces reales:

$$x^{2n+1} + ax + b = 0$$

Sugerencia: Sea $f(x) = x^{2n+1} + ax + b$.
¿Cuántas raíces reales tiene $f'(x) = 0$?

15. Si a y b son constantes y n un natural, probar que la ecuación:

$$x^{2n} + ax + b = 0 \quad \text{tiene, a lo más, dos raíces reales.}$$

Sugerencia: Sea $f(x) = x^{2n} + ax + b$.
¿Cuántas raíces reales tiene $f'(x) = 0$?

16. Probar que la ecuación $3\tan x + x^2 = 2$ tiene exactamente una raíz en $\left[0,\, \frac{\pi}{4}\right]$.

17. Si $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, probar que la ecuación $P'(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

18. Probar que un polinomio de grado 3 tiene, a lo más, 3 raíces reales. *Sugerencia: Suponga que tiene 4 raíces y razone como en el problema resuelto 4.2.2.*

19. Probar que un polinomio de grado n tiene, a lo más, n raíces reales. *Sugerencia: Suponga que tiene $n+1$ raíces y razone como en el problema resuelto 4.2.3. No olvides usar inducción.*

20. Si $g(1) = 8$ y $g'(x) \geq 3$ para todo x ¿cuál es el menor valor posible que puede tener $g(5)$?

21. Si a y b son reales, y n un natural, tales que $0 < a < b$ y $n > 1$; probar que:

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a $f(x) = x^n$ en $[a,\, b]$.

22. Probar que $e^x > 1 + x$, $\forall x > 0$.

23. Probar que:

- **a.** para cualquier $x > 1$ existe $c \in (1,\, x)$ tal que $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$.
- **b.** $\sqrt{x} < \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$, para todo $x > 1$ (usando la parte **a**).

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a $f(x) = \sqrt{x}$ *en* $[1,\, x]$.

24. Si g es impar y diferenciable en $\mathbb{R}$, demostrar que para todo real $a > 0$, existe $c \in (-a,\; a)$ tal que $g'(c) = \frac{g(a)}{a}$.

25. Usando el teorema del valor medio, probar que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$.

26. Usando el teorema del valor medio, probar que:

$$|\tan^{-1} x - \tan^{-1} y| \leq |x - y|$$

27. Probar que $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$.

28. Probar que $2\operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}\left(1 - 2x^2\right)$, para $x \geq 0$.
Sugerencia: dada la función $f(x) = 2\operatorname{sen}^{-1} x - \cos^{-1}\left(1 - 2x^2\right)$, *probar que* f *es constante:*

$$f(x) = C. \textit{ Luego, mostrar que } C = 0$$

29. Probar que:

$$2\tan^{-1} x + \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -\pi, & \text{si } x \leq -1 \\ \pi, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En los problemas del 30 al 32, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy en el intervalo indicado. Encontrar los puntos c que satisfacen la conclusión del teorema.

30. $f(x) = \operatorname{sen} x,\; g(x) = \cos x$ en $\left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]$

31. $f(x) = \ln x,\; g(x) = \frac{1}{x}$, en $[1,\, \mathrm{e}]$ **32.** $f(x) = \mathrm{e}^{x},\; g(x) = \mathrm{e}^{-x}$, en $[0,\, 1]$

SECCION 4.3

MONOTONÍA, CONCAVIDAD Y CRITERIOS PARA EXTREMOS LOCALES

Sea f una función, y sea I un intervalo. Recordemos que:

1. $\boldsymbol{f}$ **es creciente** en el intervalo I si, para cualquier par de puntos x_1 y x_2 de I, se cumple que:

$$\boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

2. $\boldsymbol{f}$ **es decreciente** en el intervalo I si, para cualquier par de puntos x_1 y x_2 de I, se cumple que:

$$\boldsymbol{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

3. $\boldsymbol{f}$ **es monótona** en el intervalo I si f es creciente o decreciente en I.

El siguiente criterio nos permitirá saber si una función es creciente o decreciente con solo conocer el signo de la derivada.

Teorema 4.3.1 **Criterio de Monotonía.**

Si f es una función continua en un intervalo I, y diferenciable en todo punto interior de I, entonces se cumple que:

1. Si $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ en todo I, entonces f es **creciente** en I.

2. Si $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ en todo I, entonces f es **decreciente** en I.

Demostración

1. Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera de I. Supongamos que $x_1 < x_2$.

Como $[x_1, x_2]$ está contenido en el intervalo I, f es continua en $[x_1, x_2]$, y es diferenciable en (x_1, x_2). Por el teorema del valor medio, existe c en (x_1, x_2) tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Pero,

$$f'(c) > 0 \quad \text{y} \quad x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

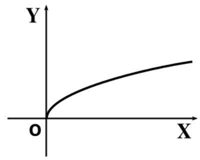
Como x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera de I, se concluye que f es creciente en I.

2. Se procede como en 1.

Ejemplo 4.3.1 Probar que $f(x) = \sqrt{x}$ es creciente en todo su dominio.

Solución

El dominio de f es el intervalo $[0, +\infty)$, en el cual f es continua. Además, f es diferenciable en el intervalo $(0, +\infty)$, y se cumple que:



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \ \forall x \in (0, +\infty)$$

Luego, por la parte 1 del teorema anterior, concluimos que $f(x) = \sqrt{x}$ es creciente en todo su dominio, que es $[0, +\infty)$.

La mayor parte de las funciones con las que trabajamos son crecientes en algunos intervalos y decrecientes en otros. A estos intervalos los llamaremos **intervalos de crecimiento y decrecimiento**, respectivamente.

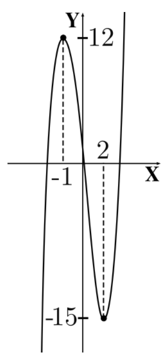
De acuerdo al teorema anterior, estos intervalos están comprendidos entre los puntos donde la derivada se anula o no está definida; es decir, los puntos críticos de la función f.

Ejemplo 4.3.2 Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

Solución

Hallemos los números críticos de f:



$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2) \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 6(x+1)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{o} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Ahora analizamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos:

$$(-\infty, -1), \ (-1, 2) \quad \text{y} \quad (2, +\infty):$$

$$\begin{aligned} x \in (-\infty, -1) \Leftrightarrow x < -1 &\Rightarrow x + 1 < 0 \quad \text{y} \quad x - 2 < 0 \\ &\Rightarrow f'(x) = 6(x+1)(x-2) > 0 \\ &\Rightarrow f \text{ es creciente en el intervalo } (-\infty, -1] \end{aligned}$$

Este resultado, así como los correspondientes a los otros intervalos, los sintetizamos en la siguiente tabla, donde "$\nearrow$" indica que f es creciente y "$\searrow$" indica que f es decreciente.

$$f'(x) = 6(x+1)(x-2)$$

$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x) = 6(-)(-) = +$ $\nearrow$	$f'(x) = 6(+)(-) = -$ $\searrow$	$f'(x) = 6(+)(+) = +$ $\nearrow$	

f es creciente en $(-\infty, -1]$ y en $[2, +\infty)$, y es decreciente en $[-1, 2]$.

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA EXTREMOS LOCALES

El teorema anterior nos permite determinar si un número crítico da lugar a un mínimo local, máximo local, o a ninguno de los dos casos. Examinemos el número crítico -1 en el ejemplo anterior.

El gráfico muestra que f es creciente antes de -1, en el intervalo $(-\infty, -1)$, y es decreciente después de -1, en el intervalo $(-1, 2)$. En consecuencia, $f(-1) = 12$ es un máximo local.

De acuerdo al teorema, podemos sustituir los términos creciente y decreciente por $f'(x) > 0$, en $(-\infty, -1)$, y por $f'(x) < 0$, en (-1, 2). El siguiente teorema entrega más precision sobre este argumento.

Teorema 4.3.2

Criterio de la Primera Derivada para Extremos Locales

Sea f una función continua en un intervalo (a, b), y sea $c \in (a, b)$ un punto crítico de f.

1. Si $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ para $x \in (a, c)$ y $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ para $x \in (c, b)$, entonces:

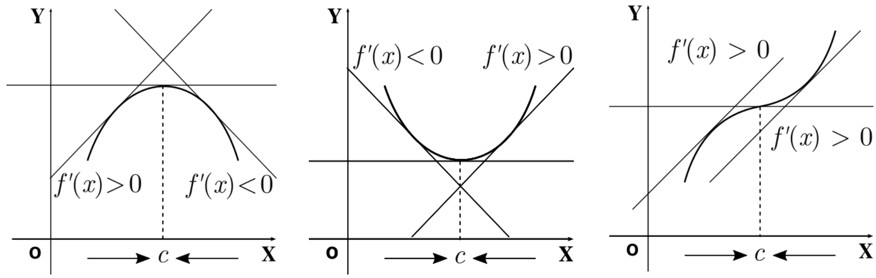
$f(c)$ es un máximo local

2. Si $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ para $x \in (a, c)$ y $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ para $x \in (c, b)$, entonces:

$f(c)$ es mínimo local

3. Si **$f'(x)$ tiene el mismo signo** en (a, c) y en (c, b), entonces:

$f(c)$ no es un extremo local



Máximo Local **Mínimo Local** **No hay Extremo Local**

Demostración

Estos resultados son resultado directo del criterio de monotonía (Teorema 4.3.1).

Ejemplo 4.3.3 Hallar los extremos locales de la función:

$$f(x) = x(5-x)^{\frac{2}{3}}$$

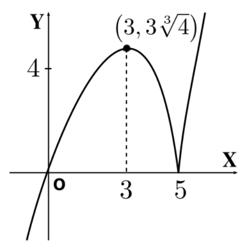
Solución

Caso 1. Hallamos los números críticos:

$$f'(x) = x\left(\frac{2}{3}\right)(5-x)^{-\frac{1}{3}}(-1) + (5-x)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{5(3-x)}{3\sqrt[3]{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5(3-x) = 0 \Rightarrow x = 3$$



Además, $f'(x)$ no existe en $x = 5$.

Luego, los números críticos de f son 3 y 5.

Caso 2. Aplicamos el criterio de la primera derivada. Para esto, analizamos el signo de la derivada en los intervalos:

$$(-\infty,\, 3),\ (3, 5)\ \text{ y }\ (5,\, +\infty)$$

Sintetizamos los resultados en la siguiente tabla.

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{5(3-x)}{3\sqrt[3]{5-x}}}$$

$-\infty$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{5}$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{(+)}{(+)} = +$ $\nearrow$	$f'(x) = \frac{(-)}{(+)} = -$ $\searrow$	$f'(x) = \frac{(-)}{(-)} = +$ $\nearrow$	

El criterio de la primera derivada nos dice que $f(3) = 3\sqrt[3]{4}$ es un máximo local y $f(5) = 0$ es un mínimo local.

CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Las figuras que veremos en la próxima definición, a pesar de ser gráficos de funciones crecientes en el intervalo $[a, b]$, tienen una notable diferencia: ellas se "doblan" en direcciones opuestas. La primera es **cóncava hacia arriba** y la segunda es **cóncava hacia abajo**.

Para definir estos términos con precisión, observemos sus correspondientes rectas tangentes. La gráfica que es cóncava hacia arriba se mantiene siempre encima de cualquiera de sus rectas tangentes. En cambio, la que es cóncava hacia abajo se mantiene siempre por debajo de cualquiera de sus tangentes.

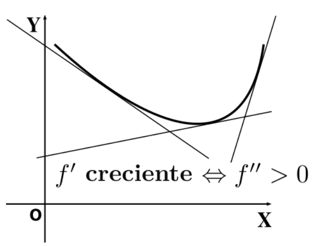
Ahora, si nos concentramos en las pendientes, en lugar de las tangentes, vemos que las pendientes van creciendo en las gráficas que son cóncavas hacia arriba, mientras decrecen en las gráficas que son cóncavas hacia abajo.

Como la pendiente está dada por la derivada, entonces *concavidad hacia arriba* significa derivada creciente y *concavidad hacia abajo* significa derivada decreciente. Esto último será nuestra definición de concavidad.

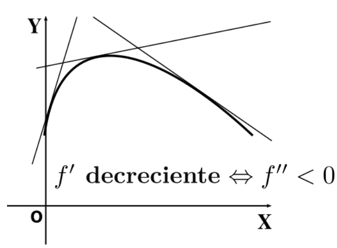
Definición Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto I.

1. El gráfico de f es **cóncavo hacia arriba** en I si f' es **creciente** en I.

2. El gráfico de f es **cóncavo hacia abajo** en I si f' es **decreciente** en I.



Cóncava hacia arriba



Cóncava hacia abajo

El criterio de monotonía, aplicado a la función derivada, nos proporciona un criterio de concavidad. Usaremos la frase: "f es dos veces diferenciable en un intervalo I" para indicar que la segunda derivada, $f''(x)$, existe en todo punto x de I.

Teorema 4.3.3 **Criterio de concavidad.**

Sea f una función dos veces diferenciable en un intervalo abierto I.

1. Si $\boldsymbol{f''(x) > 0}$, para todo punto x interior de I, entonces:

El gráfico de f es cóncavo hacia arriba en I.

2. Si $\boldsymbol{f''(x) < 0}$, para todo punto x interior de I, entonces:

El gráfico de f es cóncavo hacia abajo en I.

Demostración

Basta con aplicar el criterio de monotonía a la función derivada f'.

Ejemplo 4.3.4

Hallar los intervalos de concavidad de la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Solución

En lineas generales, nos piden hallar los intervalos donde f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo; es decir, hallar los intervalos donde $f''(x) > 0$, y donde $f''(x) < 0$. Tenemos que:

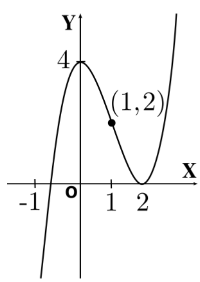
$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

Luego:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

y

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{y} \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$



En resumen, tenemos la siguiente tabla:

$$\boldsymbol{f''(x) = 6(x-1)}$$

$-\infty$ **1**	$+\infty$
$f''(x) = 6(-) = -$ $\frown$	$f''(x) = 6(+) = +$ $\smile$

Los símbolos $\smile$ y $\frown$ significan cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, respectivamente.

Luego, el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en el intervalo $(-\infty,\ 1)$, y es cóncavo hacia arriba en el intervalo $(1,\ +\infty)$.

PUNTOS DE INFLEXIÓN Y NÚMEROS CRÍTICOS DE SEGUNDO ORDEN

En el gráfico del ejemplo anterior, el punto $(1,\ 2)$ es un punto muy especial en lo que respecta a concavidad, ya que el gráfico cambia de cóncavo hacia abajo a cóncavo hacia arriba en este punto. Por esta razón, a este se le llama **punto de inflexión**. Observe que para este punto se cumple que $f''(1) = 0$.

Definición Sea f una función continua en c.

Diremos que el punto $(c,\ f(c))$ es un **punto de inflexión** del gráfico de f si éste es cóncavo hacia arriba a un lado de c, y cóncavo hacia abajo en el otro lado. Si $(c,\ f(c))$ es un punto de inflexión de la función $y = f(x)$, entonces debe cumplirse que, para los x cercanos a c, los signos de $f''(x)$ deben ser distintos antes y después de c. Además, $f''(x)$ puede o no existir en c; pero si existe, debe cumplirse que $f''(c) = 0$.

Luego, los candidatos a ser puntos de inflexión son los puntos donde $f''(x) = 0 \quad \text{o} \quad f''(x)$ no existe, es decir, los **números críticos** de $\boldsymbol{f'}$, a los que llamaremos **números críticos de segundo orden de $\boldsymbol{f}$**.

Ejemplo 4.3.5

Hallar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de la siguiente función, evaluando su gráfico:

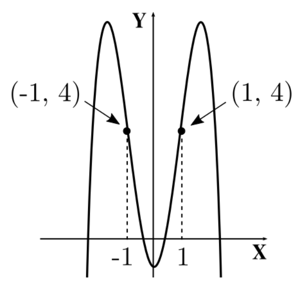
$$f(x) = -x^4 + 6x^2 - 1$$

Solución

Paso 1. Números críticos de segundo orden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x^3 + 12x \\ &\Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 12 \\ &\qquad\qquad = -12(x+1)(x-1) \\ &\Rightarrow \boldsymbol{f''(x) = -12(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow -12(x+1)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{o} \quad x = 1 \end{aligned}$$



Paso 2. Signo de f'' en $(-\infty,\,-1)$, $(-1,\,1)$ y $(1,\,+\infty)$.

$$\boldsymbol{f''(x) = -12(x+1)(x-1)}$$

$(-\infty,\,-1)$	$(-1,\,1)$	$(1,\,+\infty)$
$f''(x) = -(-)(-) = -$	$f''(x) = -(+)(-) = +$	$f''(x) = -(+)(+) = -$
$\frown$	$\smile$	$\frown$

La gráfica de f es cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty,\,-1)$ y $(1,\,+\infty,)$, y es cóncava hacia arriba en $(-1,\,1)$.

Además, la tabla nos indica que hay cambios de concavidad en -1 y 1; por lo tanto, tenemos dos puntos de inflexión:

$$(-1,\,f(-1)) = (-1,\,4) \qquad \text{y} \qquad (1,\,f(1)) = (1,\,4)$$

Ejemplo 4.3.6 Dada la función $g(x) = \sqrt[3]{x-2}+1$, hallar:

a. números críticos de segundo orden de g.

b. intervalos de concavidad.

c. puntos de inflexión.

Solución

a. Números críticos de segundo orden de g:

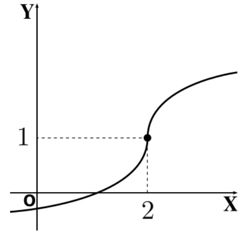
$$g(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}} + 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{g''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}}$$

$g''(x)$ no se anula en ningún punto; sin embargo, $g''(x)$ no existe en 2. Por lo tanto, g tiene un solo número crítico de segundo orden, que es 2.

b. Signos de g'' en los intervalos $(-\infty,\,2)$ y $(2,\,+\infty)$:

$$\boldsymbol{g''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}}$$

$(-\infty,\,2)$	$(2,\,+\infty)$
$g''(x) = -\frac{2}{(-)} = +$	$g''(x) = -\frac{2}{(+)} = -$
$\smile$	$\frown$



El gráfico es cóncavo hacia arriba en $(-\infty,\,2)$ y hacia abajo en $(2,\,+\infty)$.

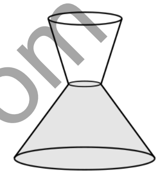
c. El resultado anterior nos dice que $(2,\ f(2)) = (2,\ 1)$ es punto de inflexión.

El siguiente ejemplo exhibe conceptos de concavidad y puntos de inflexión presentes en la vida real.

Ejemplo 4.3.7

Se vierte agua en un frasco, con un flujo de agua sea constante; es decir, en un volumen fijo por unidad de tiempo.

Construya un gráfico de la altura del agua en el frasco como función del tiempo: $h = f(t)$.



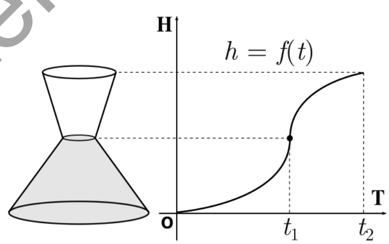
Solución

Evidentemente, la función $h = f(t)$ es creciente; es más, la velocidad con que crece la altura del agua, h, es variable.

Al inicio, debido a la forma del frasco, la velocidad con que sube el agua, $v(t)$, crece hasta llegar al cuello del frasco (cuando $h = f(t_1)$). A partir de este punto, la velocidad es decreciente. En resumen:

1. $v(t)$ es creciente en $[0,\ t_1]$. Por lo tanto, $v'(t) > 0$ en $(0,\ t_1)$

2. $v(t)$ es decreciente en $[t_1,\ t_2]$. Por lo tanto, $v'(t) < 0$ en $(t_1,\ t_2)$



Pero $v(t) = f'(t)$, por lo tanto, $v'(t) = f''(t)$. Luego, de (1) y (2):

$$f''(t) > 0 \ \text{ en } \ (0,\ t_1) \qquad \textbf{(3)}$$

$$f''(t) < 0 \ \text{ en } \ (t_1,\ t_2) \qquad \textbf{(4)}$$

Concluimos que el gráfico de $h = f(t)$ es cóncavo hacia arriba en $(0,\ t_1)$, es cóncavo hacia abajo en $(t_1,\ t_2)$, y que $(t_1,\ f(t_1))$ es un punto de inflexión.

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS LOCALES

La segunda derivada nos proporciona otro método simple para determinar la naturaleza de un número crítico.

Teorema 4.3.4

Si $f'(c) = 0$, y f'' es continua en un intervalo abierto que contiene a c, entonces se cumple que:

1. $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$ **es un mínimo local**.

2. $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$ **es un máximo local**.

Demostración

Como $f'(c) = 0$, c es número crítico de f.

1. Como $f''(c) > 0$ y f'' es continua en c, entonces:

Existe un intervalo abierto I tal que: $f''(x) > 0, \forall x \in I$.

Por el criterio de concavidad, esto significa que el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en el intervalo I. En consecuencia, $f(c)$ es un mínimo local.

2. Como $f''(c) < 0$ y f'' es continua en c, entonces:

Existe un intervalo abierto I tal que: $f''(x) < 0, \forall x \in I$.

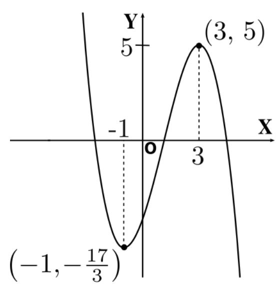
Por el criterio de concavidad, esto significa que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en el intervalo I. En consecuencia, $f(c)$ es un máximo local.

Ejemplo 4.3.8

Aplicando el criterio de la segunda derivada, determinar los extremos locales de la siguiente función:

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 4$$

Solución



Hallamos los números críticos de f:

$$f'(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -(x+1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ o } x = 3$$

Los números críticos de f son -1 y 3.

Aplicamos el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = -2x + 2 = -2(x-1)$$

$f''(-1) = -2(-1-1) = 4 > 0$, entonces $f(-1) = -\frac{17}{3}$ es un mínimo local.

$f''(3) = -2(3-1) = -4 < 0$, entonces $f(3) = 5$ es un máximo local.

EXTREMO LOCAL ÚNICO EN UN INTERVALO ARBITRARIO

El teorema del valor extremo (teorema 4.1.1) nos garantiza la existencia de valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, pero no existe teorema de ese calibre para intervalos que no son cerrados. No obstante, algo podemos conseguir si sabemos que una función continua tiene un único extremo local en un intervalo cualquiera I.

El intervalo I no tiene ninguna restricción. Este puede ser abierto, cerrado, semicerrado, finito o infinito.

Teorema 4.3.5 **Un extremo local único es un extremo absoluto.**

Sea f una función continua en un intervalo I. Si $f(c)$ es un **extremo local único en *I***, entonces $f(c)$ es un **extremo absoluto**. En términos más precisos:

a. Si $f(c)$ es un máximo local en I, entonces:

$$\boldsymbol{f(c)} \text{ es un } \textbf{máximo absoluto} \text{ de } \boldsymbol{f} \text{ en } \boldsymbol{I}$$

b. Si $f(c)$ es un mínimo local en I, entonces:

$$\boldsymbol{f(c)} \text{ es un } \textbf{mínimo absoluto} \text{ de } \boldsymbol{f} \text{ en } \boldsymbol{I}.$$

Demostración

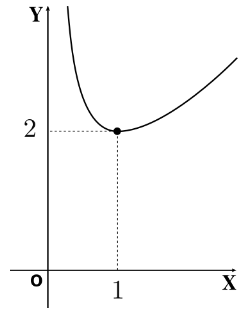
Ver el problema resuelto 4.3.3.

Ejemplo 4.3.9

Hallar los extremos absolutos de la siguiente función en el intervalo $(0, +\infty)$:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Solución



Números críticos:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \ \text{ o } \ x = -1$$

Desechamos -1 por no estar en $(0, +\infty)$.

Ahora, apliquemos el criterio de la segunda derivada a 1:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$$

Luego, $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ es un mínimo local que, además, es el único número extremo local en $(0, +\infty)$; por lo tanto, $f(1) = 2$ es mínimo absoluto de f en el intervalo $(0, +\infty)$.

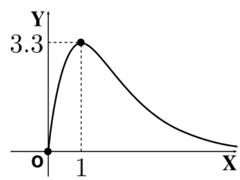
Si el intervalo I del teorema anterior es semiabierto ($[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$), entonces es posible que f tenga dos extremos absolutos.

De ser así, el segundo extremo debe tener el valor de la función en el extremo cerrado. El siguiente ejemplo nos ilustra esta situación.

Ejemplo 4.3.10

Hallar los extremos absolutos de $f(x) = 9x\mathrm{e}^{-x}$ en el intervalo $[0, +\infty)$:

Solución



Hallemos los números críticos de f:

$$f'(x) = -9x\mathrm{e}^{-x} + 9\mathrm{e}^{-x} = -9\mathrm{e}^{-x}(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -9\mathrm{e}^{-x}(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

f tiene un único número crítico en el intervalo $[0, +\infty)$, que es $x = 1$.

Apliquemos el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = 9\mathrm{e}^{-x}(x-1) - 9\mathrm{e}^{-x} = 9\mathrm{e}^{-x}(x-2),$$

$$f''(1) = 9\mathrm{e}^{-1}(1-2) = -\frac{9}{\mathrm{e}} < 0$$

Luego, $f(1) = 9(1)\mathrm{e}^{-1} = \frac{9}{\mathrm{e}} \approx 3.3$ es un máximo local.

Además, por ser $f(1)$ el único extremo local, $f(1) = \frac{9}{e} \approx 3.3$ es el máximo absoluto en el intervalo $[0, +\infty)$.

Por otro lado, como $0 < f(x)$ para $x > 0$ y $f(0) = 0$, concluimos que $f(0) = 0$ es el mínimo absoluto de f en $[0, +\infty)$.

PROBLEMAS RESUELTOS 4.3

Problema 4.3.1

El gráfico adjunto es el gráfico de la derivada de una función continua f, con dominio $[0, 6]$. Determinar:

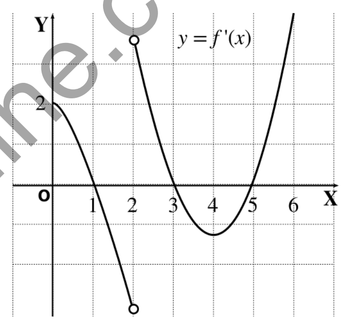
a. intervalos de monotonía de f.

b. números críticos de f; decidir la clase de extremo local a la que dan lugar.

c. intervalos de concavidad de f.

d. números críticos de segundo orden de f y los puntos de inflexión.

e. Esbozar el gráfico de f, teniendo en cuenta que $f(0) = 3$.



Solución

a. Vemos que $f'(x) > 0$ en los intervalos $(0, 1)$, $(2, 3)$ y $(5, 6)$; mientras que $f'(x) < 0$ en los intervalos $(1, 2)$ y $(3, 5)$. Luego, f es creciente en $[0, 1]$, $[2, 3]$ y $[5, 6]$, y decreciente en $[1, 2]$ y $[3, 5]$.

b. Los números críticos son 1, 2, 3, y 5. En efecto:

$$f'(1) = f'(3) = f'(5) = 0, \text{ y no existe } f'(2).$$

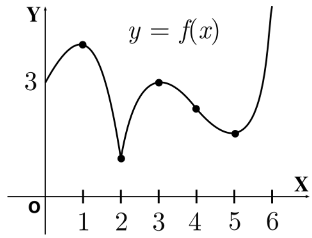
La parte **a** y el criterio de la primera derivada nos dicen que $f(1)$ y $f(3)$ son máximos locales, y que $f(2)$ y $f(5)$ son un mínimos locales.

c. $f'(x)$ es decreciente en $(0, 2)$ y $(2, 4)$, y creciente en $(4, 6)$. En consecuencia, f es cóncava hacia abajo en los intervalos $(0, 2)$ y $(2, 4)$, y cóncava hacia arriba en el intervalo $(4, 6)$.

d. La gráfica de f' nos muestra que f' tiene un mínimo local en $x = 4$; por lo tanto, $f''(4) = 0$. Por otro lado, no existe $f''(2)$, ya que es discontinua en $x = 2$. Luego, tenemos dos números críticos de segundo orden, 2 y 4.

No obstante, la parte **c** nos dice que sólo $(4,\ f(4))$ es un punto de inflexión.

e. La gráfica esbozada sólo nos muestra su forma sin mucha precisión en cuanto a las ordenadas de los puntos notables, ya que estas ordenadas son desconocidas.



Problema 4.3.2 Dada la función $f(x) = x^4 \mathrm{e}^{-x}$, hallar:

- **a.** números críticos.
- **b.** intervalos de monotonía.
- **c.** extremos locales.
- **d.** números críticos de segundo orden.
- **e.** intervalos de concavidad.
- **f.** puntos de inflexión.

Solución

a. Números Críticos e Intervalos de monotonía.

$$f'(x) = 4x^3\mathrm{e}^{-x} - x^4\mathrm{e}^{-x} = x^3(4-x)\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f'(x) = x^3(4-x)\mathrm{e}^{-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(4-x)\mathrm{e}^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{ o } \ x = 4$$

Los números críticos son 0 y 4.

b. Intervalos de monotonía:

$$\boldsymbol{f'(x) = x^3(4-x)\mathrm{e}^{-x}}$$

$-\infty$ a **0**	**0** a **4**	**4** a $+\infty$
$f'(x) = (-)(+)(+) = -$	$f'(x) = (+)(+)(+) = +$	$f'(x) = (+)(-)(+) = -$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

f es decreciente en $(-\infty,\ 0]$ y $[4,\ +\infty)$, y creciente en $[0,\ 4]$.

c. Extremos relativos.

El cuadro anterior y el criterio de la primera derivada nos indican que $f(0)=0$ es un mínimo local, y que $f(4)$ es un máximo local:

$$f(4)=4^4\mathrm{e}^{-4}=\frac{256}{\mathrm{e}^4}\approx 4.7$$

d. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

$$f''(x)=12x^2\mathrm{e}^{-x}-4x^3\mathrm{e}^{-x}-\left(4x^3\mathrm{e}^{-x}-x^4\mathrm{e}^{-x}\right)=x^2\left(x^2-8x+12\right)\mathrm{e}^{-x}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f''(x)=x^2(x-2)(x-6)\mathrm{e}^{-x}}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow x=0,\ x=2\ \text{ o }\ x=6$$

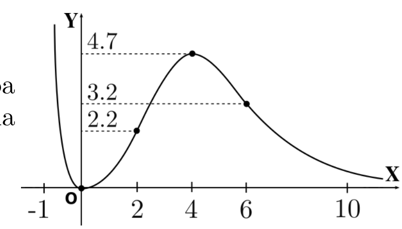
Los números críticos de segundo orden son: 0, 2 y 6.

e. Intervalos de concavidad:

$$\boldsymbol{f''(x)=x^2(x-2)(x-6)\mathrm{e}^{-x}}$$

$-\infty$ a 0	0 a 2	2 a 6	6 a $+\infty$
$f''(x)=(+)(-)(-)(+)=+$ ⌣	$f''(x)=(+)(-)(-)(+)=+$ ⌣	$f''(x)=(+)(+)(-)(+)=-$ ⌢	$f''(x)=(+)(+)(+)(+)=+$ ⌣

La tabla nos dice que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty,\,0)$, $(0,\,2)$ y $(6,+\infty)$; y cóncava hacia abajo en $(2,\,6)$.



Los puntos de inflexión son:

$$(2,\,f(2))=\left(2,\,\left(16\mathrm{e}^{-2}\right)\right)\qquad (6,\,f(6))=\left(6,\,\left(1,296\mathrm{e}^{-6}\right)\right)$$

$$\approx(2,\,2.2)\qquad\qquad \approx(6,3.2)$$

$\boxed{\textbf{Problema 4.3.3}}$ **Probar el teorema 4.3.5.**

Sea f una función continua en un intervalo I. Si $f(c)$ es un **extremo local único en I**, entones $f(c)$ es un **extremo absoluto**.

En términos más precisos:

a. Si $f(c)$ es un máximo local en I, entonces:

$$\boldsymbol{f(c)} \text{ es un } \textbf{máximo absoluto} \text{ de } \boldsymbol{f} \text{ en } \boldsymbol{I}$$

b. Si $f(c)$ es un mínimo local en I, entonces:

$$\boldsymbol{f(c)} \text{ es un } \textbf{mínimo absoluto} \text{ de } \boldsymbol{f} \text{ en } \boldsymbol{I}.$$

Solución

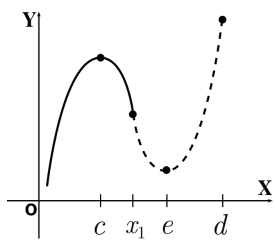
Probamos sólo la parte **a**, ya que para la parte **b** se procede en forma similar.

a. Sea $f(c)$ un máximo local que es el único en el intervalo I. Por definición, c es un punto interior de I. Procedemos por reducción al absurdo.

Si $f(c)$ no es máximo absoluto, existe un d en I tal que $f(c) < f(d)$.

Supongamos que $c < d$. Por ser $f(c)$ un máximo local, existen números x_1, entre c y d, tal que:

$$f(x_1) < f(c) < f(d) \qquad (1)$$

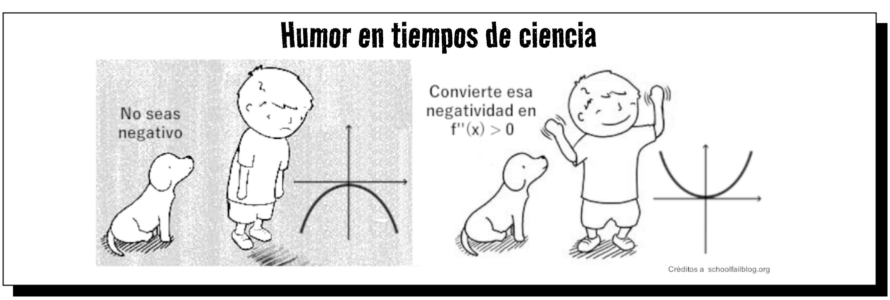


Pero, por el teorema del valor extremo, existe un número e en el intervalo cerrado $[c,\, d]$ tal que $f(e)$ es el mínimo de f en $[c,\, d]$.

Debemos tener que $f(e) \leq f(x_1)$ y, por (1):

$$f(e) < f(c) < f(d)$$

Luego, $c < e < d$, entonces $f(e)$ es un mínimo local distinto de $f(c)$. Esto contradice la unicidad de $f(c)$.



PROBLEMAS PROPUESTOS 4.3

1. Bosquejar el gráfico de una función que cumpla las siguientes condiciones:

$$f(2) = -2, \qquad f'(2) = 0, \qquad f''(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Bosquejar el gráfico de una función que cumpla las siguientes condiciones:

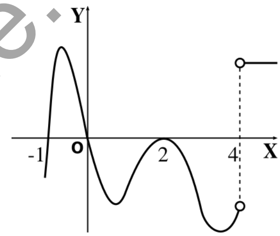
$$f(2) = 2, \quad \text{No existe } f'(2), \quad f''(x) > 0 \text{ si } x < 2, \quad f''(x) < 0 \text{ si } x > 2$$

3. Si el dibujo adjunto es el gráfico de la derivada de una función continua f, determinar:

a. los números críticos de f.

b. los intervalos de monotonía.

c. los números críticos que correspondan a máximos o mínimos locales.

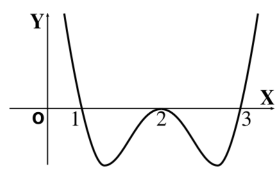


4. Si el dibujo adjunto es el gráfico de la segunda derivada de una función f, determinar:

a. los números críticos de segundo orden.

b. los intervalos de concavidad.

c. los números críticos de segundo orden que correspondan a puntos de inflexión.



En los problemas del 5 al 18, hallar:

a. números críticos. **b.** intervalos de monotonía.
c. extremos locales. **d.** números críticos de S.O.
e. intervalos de concavidad. **f.** puntos de inflexión.

5. $f(x) = -2x^2 - 8x + 3$

6. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

7. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 12$

8. $g(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

9. $h(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$

10. $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

11. $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$

12. $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$

13. $g(x) = x \mid x \mid$

14. $h(x) = x - \ln x$

15. $f(x) = xe^{x^2}$

16. $f(x) = x - 2\,\mathrm{sen}\,x,$ en $[0,\, 2\pi]$

17. $g(x) = \cos^2 x - 2\,\mathrm{sen}\,x,$ en $[0,\, 2\pi]$

18. $h(x) = 2x - \mathrm{sen}^{-1} x,$ en $[-1,\, 1]$

En los problemas 19 y 20, bosquejar el gráfico de la función continua f que satisface las condiciones dadas.

19. $f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $0 < x < 3,$ $f'(x) < 0$ si $x > 3$

$f'(0) = 0,\ f(0) = 1,\ f'(3) = 0,\ f(3) = 3$

$f''(x) < 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 5,$ $f''(x) > 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 5$

20. $f'(x) > 0$ si $x < 2,$ $f'(x) < 0$ si $2 < x < 5,$ $f'(x) = 1$ si $x > 5$

$f(0) = f(4) = 0,\ f(2) = 2.$ No existen $f'(2)$ y $f'(5)$

$f''(x) < 0$ si $x < 0$ o $4 < x < 5,$ $f''(x) > 0$ si $0 < x < 2$ o $2 < x < 4$

En los problemas 21 y 22, se dan las gráficas de la derivada de una función continua f. Determinar:

a. los números críticos de f.

b. los intervalos de monotonía de f.

c. los números críticos que dan lugar a extremos locales.

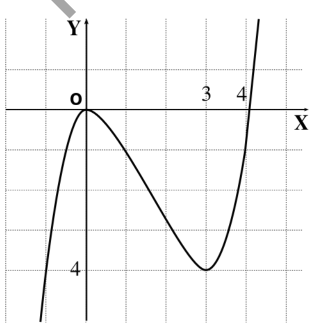
d. los números críticos de segundo orden de f.

e. los intervalos de concavidad de f.

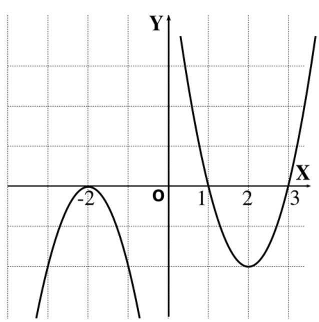
f. números críticos de segundo orden que dan lugar a puntos de inflexión.

g. Esbozar el gráfico.

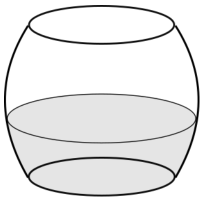
21.

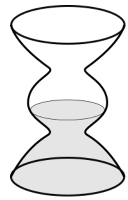


22.



En los problemas 23 y 24 se tienen jarrones en los que se vierte agua a una razón constante. En cada caso, esbozar la gráfica de la función altura del agua como función del tiempo $h = f(t)$, y mostrar su concavidad y los puntos de inflexión.

23. 

24. 

En los problemas del 25 al 28, hallar los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

25. $h(x) = 4x^3 - 3x^4, \ (-\infty, +\infty)$

26. $g(x) = 4 - 2(x - 1)^{\frac{2}{3}}$ en $[0, +\infty)$.

27. $g(x) = x \ln x, \ [0, \mathrm{e}]$

28. $h(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{-x}, \ (-\infty, +\infty)$

29. Probar que una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene uno y sólo un punto de inflexión.

30. Si la función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene por raíces a r_1, r_2 y r_3, probar que la abscisa del punto de inflexión es $x = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$

Sugerencia: $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$

31. Si f y g son cóncavas hacia arriba en el intervalo I, probar que $f + g$ es cóncava hacia arriba en I.

32. Si f es positiva y cóncava hacia arriba en un intervalo I, probar que la función $g(x) = [f(x)]^2$ es cóncava hacia arriba.

33. Si f y g son funciones positivas y cóncavas hacia arriba en el intervalo I, probar que:

a. si f y g son crecientes, fg es cóncava hacia arriba en I.

b. si f y g son decrecientes, fg es cóncava hacia arriba en I.

SECCION 4.4

FORMAS INDETERMINADAS. REGLA DE L'HÔPITAL

Un límite de una función $F(x)$ toma una forma indeterminada en $x = a$ si al evaluar, mediante las leyes de los límites (ley de la suma, del cociente, etc.), se obtiene una de las siguientes expresiones:

$$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}, \qquad \frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}}, \qquad \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}, \qquad \boldsymbol{\infty}-\boldsymbol{\infty}, \qquad \mathbf{0}^{\mathbf{0}}, \qquad \boldsymbol{\infty}^{\mathbf{0}}, \qquad \mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$$

Estas expresiones son **formas indeterminadas**. Así, tenemos que:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ en $x = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ tiene la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$ en $x = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$ tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$ en $x = 0$.

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\cot x}$ tiene la forma indeterminada 1^∞ en $x = 0$.

En esta sección estudiaremos cada una de estas formas indeterminadas.

Las fundamentales son dos: $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. A la indeterminada $\frac{0}{0}$ ya la hemos encontrado en el capítulo 1, y la hemos resuelto recurriendo a procedimientos algebraicos. En esta parte presentamos otra técnica conocida como la **regla de L'Hôpital**, la cual nos ayudará a resolver cualquier forma indeterminada.

Teorema 4.4.1 **Regla de L'Hôpital para indeterminadas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$**

Si se cumplen las siguientes condiciones:

1. f y g son diferenciables en un intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en el mismo a; además, $g'(x) \neq 0$ en todo x del intervalo, excepto posiblemente en a.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

3. Existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito).

Entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El teorema también es válido para límites laterales o infinitos, es decir que se puede reemplazar $\boldsymbol{x \to a}$ por:

$$\boldsymbol{x \to a^+, \quad x \to a^-, \quad x \to +\infty, \quad x \to -\infty}$$

La forma $\frac{\infty}{\infty}$ no es más que una forma abreviada de resumir los cuatro casos presentados a continuación:

$$\frac{+\infty}{+\infty} \qquad \frac{+\infty}{-\infty} \qquad \frac{-\infty}{+\infty} \qquad \frac{-\infty}{-\infty}$$

Demostración

Ver el problema resuelto 4.4.11 para el caso $\frac{0}{0}$. Omitimos el caso $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 4.4.1 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{\ln x + x - 1}$

Solución

Verifiquemos que se cumplen las hipótesis de la regla de L'Hôpital.

1. Las funciones $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$ y $g(x) = \ln x + x - 1$ son diferenciables en una vecindad de 1 (cerca de 1). Además:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

Por lo tanto, $g'(x) \neq 0$, cerca de 1.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \left(x^3 - x^2 + 2x - 2\right) = 1 - 1 + 2 - 2 = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} (\ln x + x - 1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$

Luego, el límite dado es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$

Ahora, aplicamos la regla de regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{D_x\left(x^3 - x^2 + 2x - 2\right)}{D_x(\ln x + x - 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x + 2}{\frac{1}{x} + 1}$$

$$= \frac{3(1)^2 - 2(1) + 2}{\frac{1}{1} + 1} = \frac{3 - 2 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

Convención

Hasta ahora, hemos sido exhaustivos verificando todas las hipótesis de la regla de L'Hôpital; sin embargo, en los próximos ejemplos y problemas sólo nos ocuparemos de la segunda hipótesis para reconocer el tipo de indeterminación.

Ejemplo 4.4.2 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\cot 2x}$

Solución

Tenemos que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cot 2x = -\infty$$

Este límite es un caso $\frac{+\infty}{-\infty}$. Aplicando la regla de regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\cot 2x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{D_x \tan x}{D_x \cot 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec^2 x}{-2\operatorname{cosec}^2 2x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\operatorname{sen}^2 2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{-2\cos^2 x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{-2\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(-2\operatorname{sen}^2 x\right) \\
&= -2\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = -2(1)^2 = -2
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4.3 Probar que:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0}, \quad \text{donde } \boldsymbol{p > 0}$$

Este resultado muestra que cualquier potencia positiva, x^p de x, domina a la función logarítmica $y = \ln x$. En otras palabras, la función $y = \ln x$ tiende a $+\infty$ más lento que cualquier potencia positiva x^p de x.

Solución

Tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^p = +\infty. \text{ Este limite es un caso } \frac{+\infty}{+\infty}$$

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{D_x\ln x}{D_x\left(x^p\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(px^{p-1}\right)}$$
$$=\frac{1}{p}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{+\infty}\right)=\frac{1}{p}(0)=0$$

En algunos casos es necesario aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez, como en el siguiente ejemplo, donde la aplicamos 2 veces.

Ejemplo 4.4.4 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{2x}$

Solución

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$, así que este límite es un caso $\frac{+\infty}{+\infty}$. Aplicamos la regla de regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{D_x\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{D_x(2x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2\left(1+\mathrm{e}^x\right)}$$

El último límite también es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, así que volvemos a aplicar la regla, y obtenemos un resultado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2\left(1+\mathrm{e}^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 4.4.5 Probar que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty,\quad\text{donde } n \text{ es un entero positivo.}$$

Este resultado nos indica que la función exponencial $y=\mathrm{e}^x$ domina a cualquier potencia positiva x^n de x. En otras palabras, la función exponencial tiende a $+\infty$ más rápido que cualquier potencia x^n de x.

Solución

Tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty\quad\text{y}\quad\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty.\ \text{Este límite es un caso }\frac{+\infty}{+\infty}$$

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital n veces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{D_x\left(e^x\right)}{D_x\left(x^n\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{D_x\left(e^x\right)}{D_x\left(nx^{n-1}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\cdots 1x^0}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n!} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to+\infty}e^x = \frac{1}{n!}(+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

Observación

Antes de aplicar la regla de L'Hôpital debemos tener la precaución de verificar que las hipótesis de ésta se cumplen. Los dos siguiente ejemplos nos muestran como se llega a resultados errados cuando no se tiene tal precaución.

Ejemplo 4.4.6 Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x+x^2}$

Solución

Es un caso $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\operatorname{sen} 2x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Este resultado es erróneo, y no fue correcto aplicar la regla de L'Hôpital para calcular el segundo límite, ya que no es una forma indeterminada:

$$\lim_{x\to 0} 2\cos 2x = 2 \neq 0$$

El resultado correcto es el siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1+2x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 2\cos 2x}{\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)} = \frac{2}{1} = 2$$

Ejemplo 4.4.7 Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x}$

Solución

Es un caso $\frac{+\infty}{+\infty}$. Aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$$

El último límite no existe, ya que, para $x = 2n\pi$ y $x = (2n+1)\pi$, con n cualquier entero, se tiene:

$$\frac{1+\cos 2n\pi}{1+\operatorname{sen} 2n\pi} = \frac{1+1}{1+0} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{1+\cos(2n+1)\pi}{1+\operatorname{sen}(2n+1)\pi} = \frac{1-1}{1+0} = 0$$

Estos resultados distintos demuestran que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$ no existe, por lo cual no se cumple la hipótesis 3 del teorema 4.4.1, cuyo enunciado hace obligatoria la existencia de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pero tengamos cuidado, esto no implica que el límite inicial no exista, lo único que nos dice es que, si el límite inicial existe, este no se puede calcular usando la regla de L'Hôpital. Por lo tanto, se debe buscar otro método. Así, procedemos como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

PRODUCTO INDETERMINADO
INDETERMINADA $0\cdot\infty$

Se busca $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)}$ si se cumple que:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = 0} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty}$$

La indeterminación $\boldsymbol{0\cdot\infty}$ se transforma en $\boldsymbol{\frac{0}{0}}$ o en $\boldsymbol{\frac{\infty}{\infty}}$ transformando el producto en cociente:

$$\boldsymbol{f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}}$$

Ejemplo 4.4.8 Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

Solución

$\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; así que este es un caso $0\cdot\infty$. Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0\end{aligned}$$

DIFERENCIA INDETERMINADA
INDETERMINADA $\infty - \infty$

Se busca: $\displaystyle \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$

Se cumple: $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\displaystyle \lim_{x \to a} g(x) = \infty$

La indeterminación $\infty - \infty$ se convierte en otra de la forma $\frac{0}{0}$ o en $\frac{\infty}{\infty}$ transformando la diferencia $f(x) - g(x)$ en un cociente de funciones.

Ejemplo 4.4.9 Hallar $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right]$

Solución

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right] &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} && \left(\tfrac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \operatorname{sen} x} && \left(\tfrac{0}{0}\right) \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{-x \operatorname{sen} x + 2\cos x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

POTENCIAS INDETERMINADAS
INDETERMINADAS 0^0, ∞^0 y 1^∞

Se busca:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} \tag{1}$$

Son posibles las siguientes formas indeterminadas:

1. $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\displaystyle \lim_{x \to a} g(x) = 0$, indeterminada $\mathbf{0^0}$
2. $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\displaystyle \lim_{x \to a} g(x) = 0$, indeterminada $\boldsymbol{\infty^0}$
3. $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\displaystyle \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, indeterminada $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$

Sea $y = [f(x)]^{g(x)}$. Tomamos logaritmo:

$$\ln y = g(x) \ln f(x) \tag{2}$$

De este modo, hemos transformado a cualquiera de las tres indeterminadas anteriores en la, ya conocida, indeterminada $\mathbf{0 \cdot \infty}$, que se puede transformar en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Si se cumple que:

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} g(x) \ln f(x) = L, \tag{3}$$

entonces, la continuidad de la función logaritmo nos permite introducir el límite dentro de $\ln y$. En consecuencia, de (3):

$$L = \lim_{x\to a} \ln y = \ln\left(\lim_{x\to a} y\right) = \ln\left(\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}\right) \Rightarrow \lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^L$$

y de esta forma el problema queda resuelto.

En resumen, se procede en tres pasos:

1. Se toma logaritmo y se simplifica: $y = [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$

2. Se halla $\lim\limits_{x\to a} g(x) \ln f(x) = L$

3. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^L$

Ejemplo 4.4.10 Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{1+\ln x}}$

Solución

Tenemos que $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{1+\ln x} = 0$. Este es un caso 0^0.

Ahora:

$$y = x^{\frac{2}{1+\ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{2}{1+\ln x} \ln x \Rightarrow \ln y = 2\frac{\ln x}{1+\ln x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln y = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1+\ln x} \qquad \left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 2 \lim_{x\to 0^+} (1) = 2(1) = 2$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{1+\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} y = \mathrm{e}^2$$

Ejemplo 4.4.11 Usando la regla de L'Hôpital, probar que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx}=\mathrm{e}^{na}$$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma 1^{∞}. Bien:

$$y=\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx}\Rightarrow \ln y=nx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=n\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln y=n\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \left(\tfrac{0}{0}\right)$$

$$=n\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\dfrac{-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{a}{x}}\right]}{\frac{-1}{x^2}}=n\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{1+\frac{a}{x}}=na$$

Luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx}=\mathrm{e}^{na}$$

Ejemplo 4.4.12 Hallar el valor de a tal que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=9$$

Solución

En primer lugar, hallamos $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

Tenemos que:

$$\frac{x+a}{x-a}=1+\frac{2a}{x-a}$$

Además, si $z=x-a$, entonces $x=z+a$ y $x\to+\infty\Leftrightarrow z\to+\infty$.

Luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{x}=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{z+a}$$

$$= \lim_{z\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{a}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{z}\right]$$
$$= \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{a}\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{z}$$
$$= (1+0)^{a}\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{z}$$
$$= \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{2a}{z}\right)^{z} = \mathrm{e}^{2a} \qquad \text{(ejemplo 4.4.11)}$$

Por último:

$$\mathrm{e}^{2a} = 9 \Rightarrow 2a = \ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3 \Rightarrow a = \ln 3$$

Ejemplo 4.4.13 Hallar $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma ∞^0. Bien:

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \ln y = \operatorname{sen} x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\operatorname{sen} x \ln x = -\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\ln y = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} \qquad \left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)$$
$$= -\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x\cot x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\right] = (1)\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} = \mathrm{e}^0 = 1$$

PROBLEMAS RESUELTOS 4.4

Problema 4.4.1 Hallar $\lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $\frac{0}{0}$. Bien:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} && \left(\tfrac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} && \left(\tfrac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2
\end{aligned}$$

Problema 4.4.2 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\tan x}\right]$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $\infty - \infty$. Bien:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\tan x}\right] &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x} && \left(\tfrac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{x^2\sec^2 x + 2x\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{2x\operatorname{sen} x}{\cos x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos^2 x}{x^2 + 2x\operatorname{sen} x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos^2 x}{x^2 + x\operatorname{sen} 2x} && \left(\tfrac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{2x + 2x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x} && \left(\tfrac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}{2 - 4x\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x + 2\cos 2x}\\
&= \frac{2}{2 - 0 + 2 + 2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Problema 4.4.3 Hallar el siguiente límite, donde $n \geq 1$:

$$\lim_{x\to +\infty} x^n \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty$. Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^n \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{x^{-n}} \qquad \left(\tfrac{0}{0}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)\cos\frac{\pi}{x}}{-nx^{-n-1}} = \frac{\pi}{n}\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x^{n-1}}} = \begin{cases}\pi, & \text{si } n=1\\ +\infty, & \text{si } n>1\end{cases}\end{aligned}$$

Problema 4.4.4 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan x}{\tan 5x}$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan x}{\tan 5x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec^2 x}{5\sec^2 5x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos^2 5x}{5\cos^2 x} \qquad \left(\tfrac{0}{0}\right)\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-10\cos 5x\operatorname{sen}5x}{-10\cos x\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\operatorname{sen}10x}{\operatorname{sen}2x} \qquad \left(\tfrac{0}{0}\right)\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{10\cos 10x}{2\cos 2x} = \frac{10(-1)}{2(-1)} = 5\end{aligned}$$

Problema 4.4.5 Probar que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x = 1$

Solución

Tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x = 0$. Luego, este es un caso 0^0. Bien:

$$\begin{aligned}y = x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\ln y &= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x\to0^+}\ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+} y = \mathrm{e}^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to0^+} x^x = 1$$

Problema 4.4.6 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to1^-}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma 1^∞. Bien:

$$y=(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \Rightarrow \ln y=\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)=\frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\ln y=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}} \qquad \left(\tfrac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\frac{1}{(2-x)}}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{-\frac{1}{(2-(1))}}{-\frac{\pi}{2}(1)^2}=\frac{2}{\pi}$$

Luego,

$$\lim_{x\to 1^-}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$$

Problema 4.4.7 Hallar $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma 1^∞. Bien:

$$y=\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x \Rightarrow \ln y=x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)=\frac{\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{x}}\ln a+b^{\frac{1}{x}}\ln b\right)}{\frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\ln a+b^{\frac{1}{x}}\ln b}{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}$$

$$=\frac{a^0\ln a+b^0\ln b}{a^0+b^0}=\frac{\ln a+\ln b}{1+1}=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\frac{1}{2}\ln ab=\ln\sqrt{ab}$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}\right)^x=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$$

Problema 4.4.8 Observe con atención el siguiente límite:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}},\quad \text{donde } a>0$$

Este límite fue descrito por el marqués de L'Hôpital en el primer libro de Cálculo de la historia (*Analyse de Infiniment petits*) para ilustrar la regla que ahora lleva su nombre. Calculemos este limite.

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $\frac{0}{0}$. Bien:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}=\lim_{x\to a}\frac{\left(2a^3x-x^4\right)^{\frac{1}{2}}-a\left(a^2x\right)^{\frac{1}{3}}}{a-\left(ax^3\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2}\left(2a^3x-x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2a^3-4x^3\right)-\frac{1}{3}a\left(a^2x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(a^2\right)}{-\frac{1}{4}\left(ax^3\right)^{-\frac{3}{4}}\left(3ax^2\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(2a^4-a^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2a^3-4a^3\right)-\frac{1}{3}a\left(a^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(a^2\right)}{-\frac{1}{4}\left(a^4\right)^{-\frac{3}{4}}\left(3a^3\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(a^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2a^3\right)-\frac{1}{3}a\left(a^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(a^2\right)}{-\frac{3}{4}\left(a^4\right)^{-\frac{3}{4}}\left(a^3\right)}=\frac{-a-\frac{1}{3}a}{-\frac{3}{4}}=\frac{16}{9}a$$

$\boxed{\textbf{Problema 4.4.9}}$ Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sen}^{-1}(x)\operatorname{cosec}x$

Solución

Este límite es una indeterminada de la forma $0\cdot\infty$. Bien:

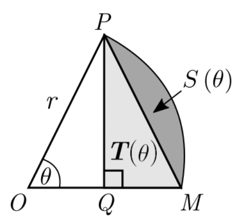
$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}^{-1}(x)\operatorname{cosec}x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\operatorname{sen}x}\qquad\left(\tfrac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x}=\frac{1}{1}=1$$

$\boxed{\textbf{Problema 4.4.10}}$

Se tiene un sector circular correspondiente a un ángulo central θ en un círculo de radio r, donde:

- $S(\theta)$ es el área del segmento circular formado por la cuerda $\overline{PM}$ y el arco $\overset{\frown}{PM}$.
- $T(\theta)$ es el área del triángulo rectángulo $\triangle PQM$.



Hallar $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{S(\theta)}{T(\theta)}$

Solución

$$
\begin{aligned}
S(\theta) &= \text{Area sector } OMP - \text{Area triángulo } \triangle OMP \\
&= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}\left(\overline{OM}\right)\left(\overline{QP}\right) = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}(r)(r\operatorname{sen}\theta) \\
&= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(\theta) &= \frac{1}{2}\left(\overline{QM}\right)\left(\overline{QP}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{OM} - \overline{OQ}\right)\left(\overline{QP}\right) = \frac{1}{2}(r - r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta) \\
&= \frac{1}{2}r^2(1-\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{2}r^2(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta) \\
&= \frac{1}{2}r^2\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right) = \frac{1}{4}r^2(2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta)
\end{aligned}
$$

Ahora:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0^+}\frac{S(\theta)}{T(\theta)} &= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}r^2(\theta-\operatorname{sen}\theta)}{\frac{1}{4}r^2(2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta)} = 2\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta} && \left(\tfrac{0}{0}\right) \\
&= 2\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1-\cos\theta}{2\cos\theta - 2\cos 2\theta} && \left(\tfrac{0}{0}\right) \\
&= 2\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{-2\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}2\theta} && \left(\tfrac{0}{0}\right) \\
&= 2\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\cos\theta}{-2\cos\theta + 8\cos 2\theta} = 2\frac{1}{-2+8} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Problema 4.4.11 Probar la **regla de L'Hôpital** para el caso $\frac{0}{0}$.

Demostración

Esta demostración está fundamentada en el Teorema del Valor Medio de Cauchy. Consideraremos que el límite es finito.

Procedemos para el caso $x \to a^+$. El caso $x \to a^-$ es similar, y si los dos se cumplen, entonces se cumple para $x \to a$.

La existencia de $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ implica la existencia de $f'(x)$ y $g'(x)$ en un intervalo $(a,\, b]$, en el cual $g'(x) \neq 0$.

Como $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$, entonces, de ser necesario, redefinimos f y g haciendo $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. De este modo, f y g son continuas en $[a,\, b]$ y son diferenciables en $(a,\, b)$.

Se cumple que $g(b) \neq 0$. En efecto, si $g(b) = 0$, por el teorema de Rolle, existe $c \in (a,\, b)$ tal que:

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) = g'(c)(b-a) &\Rightarrow 0 - 0 = g'(c)(b-a) \\ &\Rightarrow g'(c) = 0 \end{aligned}$$

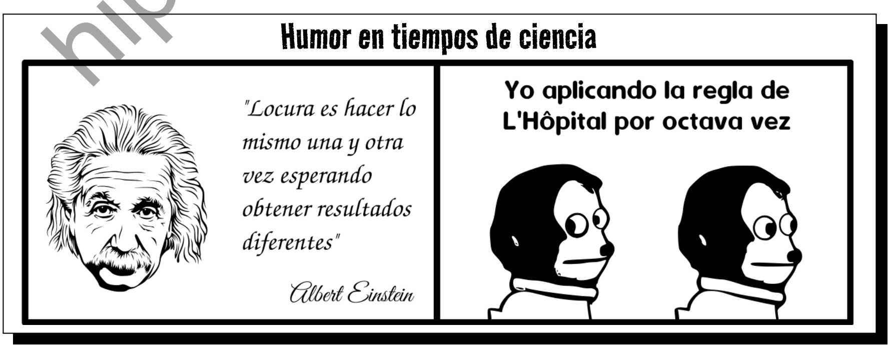
Pero este resultado contradice el hecho el que $g'(x) \neq 0$ en $(a,\, b]$. Ahora, por el teorema del valor medio de Cauchy, existe $c \in (a,\, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(b) - 0}{g(b) - 0} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Si $b \to a^+$ y $a < c < b$, entonces $c \to a^+$. Por lo que tenemos:

$$\lim_{b\to a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

lo que es equivalente a la igualdad de límites de la tesis.



PROBLEMAS PROPUESTOS 4.4

En los problemas del 1 al 43, hallar el límite indicado.

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - e^x + 1}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$

4. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1 + \cos x}{\tan^2 x}$

5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1 + \cos 4x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cot x}{\cot 2x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{\pi}{x}}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\tan^{-1} x}{1 - \cos x}$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{sen} nx}{\ln \operatorname{sen} x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^x - 5^x}{x^2}$

12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln \ln x}{\sqrt{x}}$

13. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\operatorname{sen}^2 x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\operatorname{sen}^2 x - x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^4}$

17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1 + \cos 4x}$

18. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right]$

19. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right]$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right]$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{x\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x^2}\right]$

22. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 - \cos x)\cot x$

23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (1 - \tan x)\sec 2x$

24. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x)\tan \frac{\pi x}{2}$

25. $\lim\limits_{x\to a} \left(x^2 - a^2\right)\tan \frac{\pi x}{2a}$

26. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

27. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

28. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$

30. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

31. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^{x^2}$

33. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\tan x}$

34. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$

36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1} 2x}{\tan^{-1} 3x}$

37. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \ln\left(x^2-1\right)\right)$
Sugerencia: $\ln \mathrm{e}^x = x$

38. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{senh} x)^{\frac{2}{x}}$

39. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$

40. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - x)^{\frac{1}{x}}$

41. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x}$
Sugerencia: $z = \ln x$

42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1} 3x - 3\tan^{-1} x}{x^3}$

43. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}$. *Sugerencia:* $z = \sqrt[n]{x}$

44. Si f' es continua, probar:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Sugerencia: Usar regla de L'Hôpital derivando respecto a h.

45. Si f'' es continua, probar:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

Sugerencia: Usar regla de L'Hôpital derivando 2 veces respecto a h.

SECCION 4.5

TRAZADO CUIDADOSO DEL GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN

Ya estamos en condiciones de esbozar el gráfico de una función $y = f(x)$ con bastante precisión. La siguiente técnica para alcanzar este objetivo se resume en cumplir los siguientes pasos:

1. Dominio. Se determina el dominio de la función.

2. Simetría y periodicidad.

Determinar si existe simetría respecto al eje Y o al origen. En caso afirmativo, el trabajo se reduce a la mitad, ya que sólo será necesario graficar los puntos con abscisa $x \geq 0$.

Si la función viene expresada en términos de función trigonométrica, determinar la periodicidad. Si esta es p, entonces sólo se construye el gráfico en un intervalo de longitud p, que puede ser $[0, p]$ o $[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}]$. Luego, esta parte del gráfico se traslada a los otros intervalos.

Recordar que:

a. Una función es **periódica** si existe una constante positiva p tal que:

$$f(x+p) = f(x),\ \forall x \in \text{Dom}(f)$$

El periodo es el menor p que satisface la condición anterior.

b. La gráfica de f es simétrica respecto al eje Y:

$$\Leftrightarrow f \text{ es par: } f(-x) = f(x),\ x \in \text{Dom}(f).$$

c. La gráfica de f es simétrica respecto al origen:

$$\Leftrightarrow f \text{ es impar: } f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \text{ Dom}(f).$$

3. Intersecciones con los Ejes.

La intersección con el eje Y se encuentra haciendo $x = 0$. La intersección con el eje X se encuentra resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Si la ecuación es difícil de resolver, se recomienda no insistir.

4. Continuidad y asíntotas. Determinar discontinuidades e intervalos de continuidad, y calcular los límites unilaterales en los extremos de estos intervalos. Estos límites nos indicarán las asíntotas verticales y horizontales.

5. Estudio de f'. Intervalos de monotonía. Máximos y mínimos.

Hallar los números críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos locales.

6. Estudio de f''. Concavidad y puntos de inflexión.

Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

7. Esbozar el gráfico.

Esbozar el gráfico de f con la información encontrada en los pasos anteriores. De ser necesario, calcule algunos puntos extras.

Ejemplo 4.5.1 Graficar la función racional $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

Solución

1. Dominio. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

2. Simetría y periodicidad. No es periódica.

Esta función es par. En efecto:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$$

Luego, el gráfico de f es simétrico respecto al eje Y. En consecuencia, es suficiente construir la parte del gráfico que está a la derecha del eje Y; es decir, la parte que corresponde al intervalo $[0, +\infty)$. La otra parte se obtiene reflejando la parte construida en el eje Y.

3. Intersecciones con los Ejes.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Luego, la gráfica de f intersecta al eje Y en $(0, 0)$. Por otro lado:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego, la gráfica de f intersecta al eje X en el punto $(0, 0)$.

4. Continuidad y asíntotas.

La función f es discontinua en -2 y 2. Así que los intervalos de continuidad son: $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Asíntotas Verticales.

$$\textbf{a.}\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty \qquad \textbf{b.}\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty$$

Luego, la recta $x=2$ es un asíntota vertical. Por simetría, la recta $x=-2$ también es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}=1$$

Luego, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal.

5. Estudio de $f'(x)$. Intervalos de Monotonía. Máximos y mínimos.

Números Críticos. Tenemos que:

$$f'(x)=\frac{-8x}{\left(x^2-4\right)^2}, \qquad \text{así que} \qquad f'(x)=0\Rightarrow x=0.$$

f' no está definida en $x=-2$ y $x=2$; sin embargo, estos puntos tampoco están en el dominio. Así que f tiene un único número crítico, que es 0.

Intervalos de monotonía.

$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 2	2 a $+\infty$
$f'(x)=\frac{-(-)}{(+)}=+$	$f'(x)=\frac{-(-)}{(+)}=+$	$f'(x)=\frac{-(+)}{(+)}=-$	$f'(x)=\frac{-(+)}{(+)}=-$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Mirando la tabla, deducimos que $f(0)=0$ es un máximo local.

6. Estudio de $f''(x)$. Concavidad y Puntos de inflexión.

Tenemos que:

$$f''(x)=\frac{8\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$$

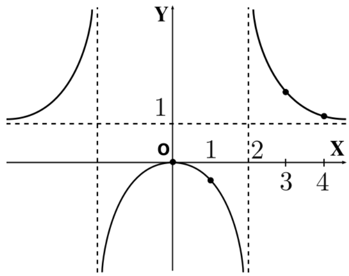
$f''(x)$ no se anula en ningún punto y no está definida en -2 y 2. Pero estos puntos no están en el dominio de f. En consecuencia, la gráfica no tiene puntos de inflexión.

Intervalos de Concavidad.

$-\infty$ a -2	-2 a 2	2 a $+\infty$
$f''(x)\frac{(+)}{(+)}=+$	$f''(x)=\frac{(+)}{(-)}=-$	$f''(x)=\frac{(+)}{(+)}=+$
$\smile$	$\frown$	$\smile$

7. Esbozo del gráfico.

x	$f(x)$
0	0
1	$-\frac{1}{3}$
3	$\frac{9}{5}$
4	$\frac{4}{3}$



Ejemplo 4.5.2 Graficar la función $f(x) = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$

Solución

1. Dominio. $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

2. Simetría y periodicidad.

a. f es periódica, con periodo 2π. Esto es:

$$f(x + 2\pi) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

En consecuencia, basta con graficar la función en un intervalo de longitud 2π; así que escogemos el intervalo $[0,\ 2\pi]$. Para obtener el gráfico completo, trasladamos esta porción al resto de intervalos.

b. f es impar, por lo tanto, su gráfica es simétrica respecto al origen.

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\operatorname{sen}(-x) - \operatorname{sen} 2(-x) = -2\operatorname{sen} x - (-\operatorname{sen} 2x) \\ &= -(2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x) = -f(x) \end{aligned}$$

En consecuencia, solamente precisamos graficar la función a la derecha del origen; es decir, en el intervalo $[0,\ \pi]$. Sin embargo, por razones didácticas, persistimos en tomar el intervalo $[0,\ 2\pi]$.

3. Intersecciones con los ejes.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2\operatorname{sen} 0 - \operatorname{sen} 2(0) = 2(0) - 0 = 0.$$

Luego, la gráfica de f intersecta al eje Y en $(0,\ 0)$. Por otro lado:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x(1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \ \text{ o } \ \cos x = 1$$

$$\Rightarrow x = 0,\ x = 2\pi \ \text{ y } \ x = \pi$$

Luego, la gráfica de f intersecta al eje X en $(0,\ 0)$, $(\pi,\ 0)$ y $(2\pi,\ 0)$

4. Continuidad y asíntotas.

f es continua en $[0,\ 2\pi]$, y no tiene asíntotas.

5. Estudio de $f'(x)$. Intervalos de monotonía. Máximos y Mínimos.

Números Críticos: Tenemos que:

$$f'(x) = 2\cos x - 2\cos 2x = 2\cos x - 2(2\cos^2 x - 1)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f'(x) = -2(2\cos^2 x - \cos x - 1)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 \quad \text{o} \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (x = 0 \quad \text{o} \quad x = 2\pi) \quad \text{o} \quad (x = \frac{2\pi}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{4\pi}{3})$$

Los números críticos son: 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, 2π.

Intervalos de monotonía:

$\boldsymbol{0}$ — $\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$ — $\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}$ — $\boldsymbol{2\pi}$
$f'(x) = -2(-) = +$	$f'(x) = -2(+) = -$	$f'(x) = -2(-) = +$
$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

La tabla nos dice que f tiene un máximo relativo en $x = \frac{2\pi}{3}$, y tiene un mínimo relativo en $x = \frac{4\pi}{3}$. Luego, los valores del máximo y mínimo relativo son:

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \text{sen}\,2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 3\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2.6$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \text{sen}\,2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -3\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -2.6$$

Sin embargo, para $x = 0$ y $x = 2\pi$, la tabla nos da la información incompleta, ya que no nos dice como es f a la izquierda de 0 ni a la derecha de 2π. Pero, debido a la periodicidad, concluimos que la función es creciente a la izquierda de 0, y a la derecha de 2π, . Luego, $x = 0$ y $x = 2\pi$ no dan lugar a extremos relativos.

6. Estudio de $f''(x)$. Concavidad y puntos de inflexión.

Números críticos de segundo orden:

$$f'(x) = -2\left(2\cos^2 x - \cos x - 1\right) \Rightarrow f''(x) = -2(-4\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{f''(x) = -2\operatorname{sen} x(1 - 4\cos x)}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\operatorname{sen} x(1 - 4\cos x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0, \ \text{ o } \ \cos x = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow (x = 0 \ \text{ o } \ x = \pi) \ \text{ o } \ (x = \theta_1 \approx 1.32 \ \text{ o } \ x = \theta_2 \approx 4.97)$$

Los números críticos de segundo orden son:

$$0, \ \pi, \ \theta_1 \approx 1.32 \ \text{ y } \ \theta_2 \approx 4.97$$

Intervalos de concavidad:

0 — $\theta_1 \approx 1.32$ — π — $\theta_2 \approx 4.97$ — 2π

$f''(x) = -(+)(-) = +$	$f''(x) = -(+)(+) = -$	$f''(x) = -(-)(+) = +$	$f''(x) = -(-)(-) = -$
$\smile$	$\frown$	$\smile$	$\frown$

La tabla nos dice que los siguientes son puntos de inflexión:

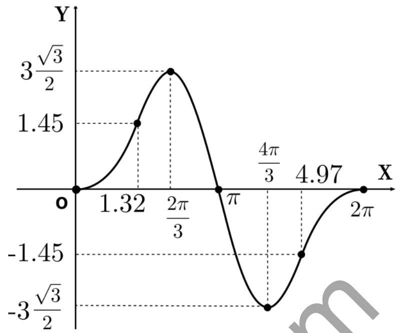
$$(\theta_1, \ f(\theta_1)) = (1.32, \ f(1.32)) \approx (1.32, \ 1.45)$$
$$(\pi, \ f(\pi)) = (\pi, \ 0)$$
$$(\theta_2, \ f(\theta_2)) = (4.97, \ f(4.97)) \approx (4.97, \ 1.45)$$

De la periodicidad de f, obtenemos que los siguientes puntos también son puntos de inflexión:

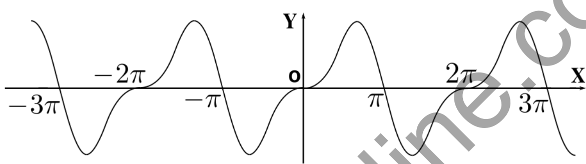
$$(0, \ f(0)) = (0, 0) \ \text{ y } \ (2\pi, \ f(2\pi)) = (2\pi, \ 0),$$

7. Esbozo de la gráfica.

$\boldsymbol{f}$ en $[\mathbf{0},\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$



$\boldsymbol{f}$ en $\mathbb{R}$



Ejemplo 4.5.3 Graficar la función $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

Solución

1. Dominio. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

2. Simetrías y periodicidad.

No es periódica pero es simétrica respecto al eje Y. En efecto:

$$f(-x) = \mathrm{e}^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$$

Bastaría construir la gráfica de f correspondiente al intervalo $[0,\ +\infty)$; sin embargo, por razones didácticas, no tomaremos en cuenta esta ventaja.

3. Intersección con los ejes.

Con el eje Y:

$$f(0) = \mathrm{e}^{-0} = 1$$

Luego, el gráfico corta al eje Y en el punto $(0,\ 1)$.

Con el eje X:

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \ \text{ no tiene solución}$$

Luego, f no corta al eje X.

4. **Continuidad y asíntotas.** La función $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ es continua en todo $\mathbb{R}$; por lo tanto, no hay asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

Luego, $y = 0$ (el eje X) es una asíntota horizontal.

5. **Estudio de f'. Intervalos de monotonía. Máximos y mínimos**

Números críticos.

$$\boldsymbol{f'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}, \qquad \text{así que} \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego, f tiene un solo número crítico, que es $x = 0$.

Intervalos de monotonía:

$-\infty$ **0**	**0** $+\infty$
$f'(x) = -(-)(+) = +$ $\nearrow$	$f'(x) = -(+)(+) = -$ $\searrow$

f es creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y es decreciente en $[0, +\infty)$. Además, f tiene un máximo en $x = 0$, que vale $f(0) = 1$.

6. **Estudio de f''. Concavidad. Puntos de inflexión**

Números críticos de segundo orden

$$f'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f''(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} D_x\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f''(x) = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Tenemos dos números críticos de segundo orden: -1 y 1

Intervalos de concavidad:

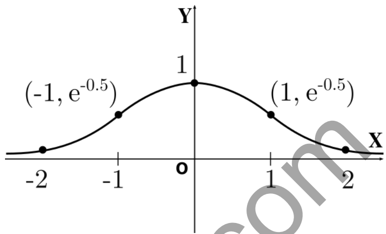
$-\infty$ **−1**	**−1** **1**	**1** $+\infty$
$f''(x) = (+)(+) = +$ $\smile$	$f''(x) = (-)(+) = -$ $\frown$	$f''(x) = (+)(+) = +$ $\smile$

La tabla nos dice que f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty,\ -1]$ y $[1,\ +\infty)$, y que es cóncava hacia abajo en el intervalo $[-1,\ 1]$. Luego, los puntos de inflexión son:

$$(-1,\ f((-1)) = (-1,\ \mathrm{e}^{-0.5}) \qquad \text{y} \qquad (1,\ f((1)) = (1,\ \mathrm{e}^{-0.5})$$

7. Esbozo del gráfico:

x	$f(x)$
0	1
1	$\mathrm{e}^{-0.5} \approx 0.606$
2	$\mathrm{e}^{-2} \approx 0.135$



¿Sabías esto?

En Estadística y Probabilidades aparece con frecuencia la ***función de densidad normal:***

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Aquí, $\boldsymbol{\mu}$ *y* $\boldsymbol{\sigma}$ *son constantes llamadas* ***media*** *y* ***desviación estándar****, respectivamente. La gráfica de esta función se obtiene aplicando técnicas de traslación y estiramiento al ejemplo anterior (4.5.3).*

GRÁFICAS CON ASÍNTOTAS OBLICUAS

Ejemplo 4.5.4 Graficar la función $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

1. Dominio.

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |\ x\ | > 1 \Leftrightarrow x < -1 \ \text{ o } \ x > 1$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Dom}(f) = (-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty)$$

Simetrías. No es periódica.

La función f es par. En efecto:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2-1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = f(x)$$

Luego, la gráfica de f es simétrica respecto al eje Y, y sólo debemos concentrarnos en graficar f en el intervalo $(1, +\infty)$.

2. Intersecciones con los ejes.

El gráfico de f no corta al eje Y, ya que $x = 0$ no está en el dominio de f.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Pero 0 no está en el dominio de f, así que f no corta al eje X.

3. Continuidad y asíntotas.

f es continua en todo su dominio, que es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Asíntotas Verticales:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Luego, $x = 1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

Luego, no hay asíntotas horizontales.

Asíntotas Oblicuas:

En el ejemplo 1.9.2 encontramos que la función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ posee dos asíntotas oblicuas:

A la izquierda: $y = -x$ *A la derecha:* $y = x$

4. Estudio de $f'(x)$. Intervalos de Monotonía. Máximos y Mínimos.

Números críticos:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}(2x) - x^2\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)}{x^2-1} = \frac{x^3-2x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}(2x) - x^2\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)}{x^2-1} = \frac{x^3-2x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^3 - 2x}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\left(x^2 - 2\right)}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

Luego,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

Sólo $x = \sqrt{2}$ es punto crítico en el intervalo $(1, +\infty)$.

Intervalos de monotonía en el intervalo $(1, +\infty)$.

$\mathbf{1}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$

$f'(x) = \frac{(+)(-)(+)}{(+)} = -$ $\searrow$	$f'(x) = \frac{(+)(+)(+)}{(+)} = +$ $\nearrow$

f tiene un mínimo relativo en $x = \sqrt{2}$, su valor es $f\left(\sqrt{2}\right) = 2$.

5. Estudio de $f''(x)$. Intervalos de Concavidad. Puntos de Inflexión.

Números críticos de segundo orden:

Derivando $f'(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$, obtenemos que:

$$\boldsymbol{f''(x) = \frac{x^2 + 2}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{5}{2}}}}$$

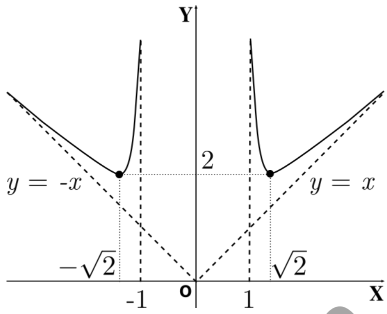
$f''(x) = 0$ no tiene soluciones reales. Por otro lado, $f''(x)$ no existe en $x = 1$, pero 1 no está en $(1, +\infty)$. Luego, f no tiene números críticos de segundo orden en $(1, +\infty)$; por lo tanto, tampoco tiene puntos de inflexión en este intervalo.

Intervalos de concavidad:

Como $f''(x) > 0\, \forall\, x$ en $(1, +\infty)$, concluimos que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(1, +\infty)$.

6. Esbozo de la gráfica.

x	$f(x)$
$-\sqrt{2}$	2
$\sqrt{2}$	2



Ejemplo 4.5.5 Graficar la función $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Solución

1. Dominio. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty,\, 0) \cup (0,\, +\infty)$

2. Simetrías y periodicidad. Ninguna simetría y no es periódica.

3. Intersección con los ejes.

Dado que $x = 0$ no está en dominio de f, el gráfico no corta al eje Y. Por otro lado:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Pero $x = 0$ no está en el dominio de f. Luego, f no corta al eje X.

4. Continuidad y asíntotas.

f es continua en todo su dominio $= (-\infty,\, 0) \cup (0,\, +\infty)$

Asíntotas verticales:

Los siguientes límites son indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$, por lo que aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0$$

Luego, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical (sólo hacia arriba).

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = (+\infty)\mathrm{e}^0 = (+\infty)(1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = (-\infty)\mathrm{e}^0 = (-\infty)(1) = -\infty$$

Luego, la gráfica de f no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Oblicuas:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1$$

En forma enteramente análoga, obtenemos que:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad b = \lim_{x\to-\infty} \left(x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x\right) = 1$$

Luego, la recta $y = x + 1$ es asíntota oblicua a la derecha y a la izquierda.

5. Estudio de $f'(x)$. Intervalos de Monotonía. Máximos y Mínimos.

Números Críticos:

$$f'(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Se tiene solo un número crítico, que es $x = 1$. Observe que no existe $f'(0)$, pero $x = 0$ no es punto crítico porque $x = 0$ no está en el dominio de f.

Intervalos de Monotonía:

$-\infty$ — 0	0 — 1	1 — $+\infty$
$f'(x) = (+)(+) = +$	$f'(x) = (-)(+) = -$	$f'(x) = (+)(+) = +$
$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

f tiene un mínimo relativo en $x = 1$ y su valor es $f(1) = \mathrm{e} \approx 2.72$

6. Estudio de $f''(x)$. Intervalos de Concavidad. Puntos de Inflexión Números críticos de segundo orden.

Derivando $f'(x)$, obtenemos:

$$\boldsymbol{f''(x) = \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} = 0$$

No hay solución y, además, $f''(x)$ no existe en 0, pero 0 no pertenece al dominio de f. Luego, f no tiene números críticos de segundo orden, por lo tanto, tampoco tiene puntos de inflexión.

7. Intervalos de concavidad:

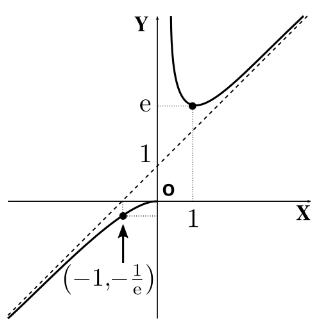
$$f''(x) = \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$-\infty$	$\mathbf{0}$	$+\infty$
$f''(x) = (-)(+) = -$ $\frown$		$f''(x) = (+)(+) = +$ $\smile$

Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$

8. Esbozo de la gráfica.

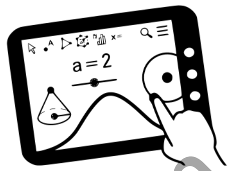
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
-1	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$
0	0
1	e



¿Sabías esto?

Existen múltiples alternativas de software para generar gráficos de funciones. Hay dispositivos físicos, como las calculadoras gráficas, pero también tenemos aplicaciones de escritorio, móviles y web.

Una aplicación web muy popular es ***Geogebra****, que fue desarrollada con propósitos educativos y está disponible en muchos idiomas. Esta es empleada por profesores, estudiantes y aficionados para modelar gráficos; sin embargo, la mayoría de sus usuarios no saben que Geogebra posee un* ***CAS****.*



Los CAS son Sistemas Algebraicos Computarizados que se encargan de manipular expresiones algebraicas con inteligencia artificial. Existen CAS mucho más complejos que son multipropósito, y son muy populares en ***Ciencia de Datos****. Entre ellos tenemos Wolfram Mathematica, Maple y Sagemath, de código abierto, para Python.*

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.5

Graficar las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

2. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

3. $f(x) = 2x + 5x^{\frac{2}{5}}$

4. $f(x) = \dfrac{8x}{x^2+1}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$

6. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$ (f es periódica con periodo 2π).

Graficar las siguientes funciones que poseen asíntotas oblicuas.

8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-2}$

9. $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$

10. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$

11. $xe^{\frac{1}{x^2}}$

SECCION 4.6

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Esta sección la dedicaremos a resolver problemas de optimización competentes en la economía, física, comercio y, en general, en la vida real. Estos problemas están planteados en términos del lenguaje diario. Nuestra primera labor (la que requiere ingenio) consiste en traducir el problema al lenguaje matemático, quedando expresado mediante una función. La segunda labor es rutinaria, ya que sólo implica calcular el máximo o el mínimo de la función encontrada. Dividimos estos problemas en dos grupos según el intervalo donde se optimiza la función, sea cerrado o no.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN INTERVALOS CERRADOS Y FINITOS

En este grupo de problemas, el resultado clave que usaremos nos lo da el teorema 4.1.1, que afirma que toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene máximo y mínimo, y estos son alcanzados en los números críticos o en los extremos, a o b, del intervalo.

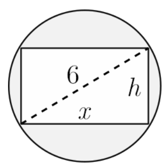
Problema 4.6.1

Se tiene un tronco de madera circular, de 3 $dm.$ de radio, que es la materia prima para producir un tablón rectangular de madera ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo si se desea que éste tenga área máxima?

Solución

Si x, h y A son la base, la altura y el área del rectángulo, respectivamente, entonces:

$$A = xh \tag{1}$$



Expresemos la altura en términos de la base. Para esto podemos aprovechar el teorema de Pitágoras, ya que el diámetro, la base y la altura forman un triángulo rectángulo con una hipotenusa de 6 dm:

$$h = \sqrt{6^2 - x^2} \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$A = x\sqrt{36 - x^2}$$

Esta función, que expresa el área del rectángulo en términos de la base, es la que debemos maximizar, pero ¿en qué intervalo? Pues, como la longitud de la base no puede ser negativa ni exceder la longitud del diámetro, debemos tener que:

$$0 \leq x \leq 6$$

En resumen, buscamos el máximo de la función:

$$A(x) = x\sqrt{36 - x^2} \text{ en el intervalo } [0,\ 6]$$

Hallemos los puntos críticos:

$$A'(x) = x\frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}} + \sqrt{36 - x^2} = \frac{2\left(18 - x^2\right)}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(18 - x^2\right)}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 18 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$$

Además, $A'(x)$ no está definida en 6. Así que los puntos críticos de $A(x)$ son $-3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ y 6.

Como $-3\sqrt{2}$ no está en el intervalo $[0,\ 6]$, lo desechamos y nos quedamos con $3\sqrt{2}$ y 6. Comparemos los valores $A(0)$, $A(6)$ y $A\left(3\sqrt{2}\right)$:

$$A(0) = (0)\sqrt{36 - 0^2} = 0, \qquad A(6) = 6\sqrt{36 - 6^2} = 0$$

$$A\left(3\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}\sqrt{36 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}\right) = 18$$

Luego, el máximo de $A(x)$ es $A\left(3\sqrt{2}\right) = 18,$ y es alcanzado en $x = 3\sqrt{2}$.

Las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

$$\text{Base} = x = 3\sqrt{2}, \qquad \text{Altura} = h = \sqrt{6^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$$

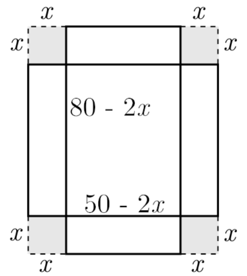
Observe que el rectángulo de área máxima es un **cuadrado**.

Problema 4.6.2

Un fabricante de envases construye cajas sin tapa, y emplea, por materia prima, láminas de cartón rectangulares de 80 *cm* de largo por 50 *cm* de ancho.

Para formar la caja se recorta un pequeño cuadrado en las cuatro esquinas de cada lámina y, luego, se doblan las aletas (como indica la figura) ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados si se quiere que la caja tenga el mayor volumen posible?

Solución



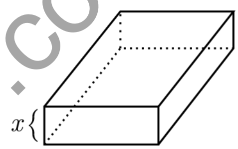
Si x es la longitud del lado de los cuadrados cortados, entonces tenemos que:

Volumen de la caja = (área de la base)(altura)

- La altura de la caja es x.
- La base es un rectángulo de $50-2x$ de ancho por $80-2x$ de largo.

Luego, si V denota el volumen de la caja, tenemos que:

$$V = (80-2x)(50-2x)(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$$



La longitud x no puede ser negativa ni puede exceder la mitad del ancho de la lámina inicial, así que:

$$0 \leq x \leq 25$$

En resumen, debemos hallar el máximo de la función volumen:

$$V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x, \quad \text{en el intervalo } [0,\ 25]$$

Hallemos sus números críticos:

$$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000 = 4(x-10)(3x-100)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x-10)(3x-100) = 0 \Leftrightarrow x = 10 \quad \text{o} \quad x = \frac{100}{3}$$

Los números críticos son 10 y $\frac{100}{3}$. Desechamos $\frac{100}{3}$ por estar fuera del intervalo $[0,\ 25]$, y nos quedamos con 10. Ahora, comparemos los valores $V(0)$, $V(25)$ y $V(10)$:

$$V(0) = (80-2(0))(50-2(0))(0) = 0$$

$$V(25) = (80-2(25))(50-2(25))(25) = 0$$

$$V(10) = (80-2(10))(50-2(10))(10) = 18,000$$

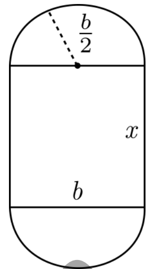
El máximo de $V(x)$ es $V(10) = 18,000\, cm^3$, y es alcanzado en $x = 10$; así que la longitud del lado de los cuadrados cortados debe ser de 10 cm.

Problema 4.6.3

Se desea construir una pista de carrera de 400 metros de perímetro, compuesta por un rectángulo con dos semicírculos situados en dos lados opuestos.

¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo si se quiere que el área de éste sea máxima?

Solución



Si b y x son las longitudes de los lados del rectángulo, entonces su área es:

$$A = bx \qquad (1)$$

El radio de los semicírculos es $\frac{b}{2}$; por lo tanto, la longitud de las dos semicircunferencias es:

$$2\left(\frac{\pi b}{2}\right) = \pi b$$

Como el perímetro de la pista es de 400 m, tenemos:

$$2x + \pi b = 400 \Rightarrow b = \frac{400 - 2x}{\pi}$$

Reemplazando este valor de b en (1):

$$A = \left(\frac{400 - 2x}{\pi}\right) x = \frac{2}{\pi}(200x - x^2)$$

La longitud x es no negativa y no puede exceder la mitad del perímetro:

$$0 \leq x \leq 200$$

En resumen, debemos hallar el máximo de la función:

$$A(x) = \frac{2}{\pi}\left(200x - x^2\right) \quad \text{en el intervalo } [0,\, 200]$$

Hallemos sus números críticos:

$$A'(x) = \frac{2}{\pi}(200 - 2x) = \frac{4}{\pi}(100 - x)$$
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - x = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

Sólo existe un número crítico, que es 100. Comparemos los valores de $A(0)$, $A(200)$ y $A(100)$:

$$A(0) = \frac{2}{\pi}\left(200(0) - (0)^2\right) = 0, \qquad A(200) = \frac{2}{\pi}\left(200(200) - (200)^2\right) = 0$$
$$A(100) = \frac{2}{\pi}\left(200(100) - (100)^2\right) = \frac{20,000}{\pi}$$

Luego, el máximo es $A(100) = \frac{20,000}{\pi}$, y lo alcanza en $x = 100$

En consecuencia, las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

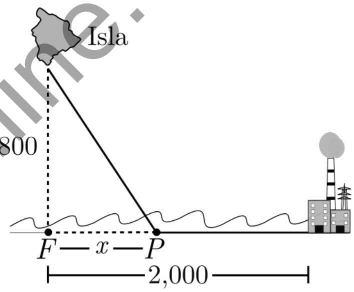
$$x = 100, \qquad b = \frac{400 - 2(100)}{\pi} = \frac{200}{\pi}$$

Problema 4.6.4

Una isla se encuentra a 800 metros de una playa recta, donde funciona una planta eléctrica, ubicada a 2,000 metros del punto F que esta frente a la isla. Para dotar de luz a la isla, se tiende un cable desde la planta hasta un punto P de la playa y, de allí, hasta la isla. El costo del tendido de un metro de cable en tierra es $\frac{3}{5}$ del costo de un metro del tendido en agua ¿Dónde debe localizarse P para que el costo del tendido sea mínimo?

Solución

Sean:



- k, el costo de tender 1 metro de cable en el agua.
- x, la distancia desde P a F.

La distancia de P a la planta es:

$$2,000 - x$$

El costo del tendido del cable en tierra es:

$$\frac{3}{5}k(2,000 - x)$$

La distancia de P a la isla, por el teorema de Pitágoras, es:

$$\sqrt{x^2 + (800)^2} = \sqrt{x^2 + 640,000}$$

y el costo del tendido de cable en el agua es:

$$k\sqrt{x^2 + 640,000}$$

Luego, el costo total del tendido es:

$$C(x) = \frac{3}{5}k(2,000 - x) + k\sqrt{x^2 + 640,000}$$

Además, x no debe ser negativa ni exceder $2,000$. Esto es:

$$0 \leq x \leq 2,000$$

En resumen, debemos hallar el mínimo de la función:

$$C(x) = \frac{3}{5}k(2,000 - x) + k\sqrt{x^2 + 640,000} \text{ en el intervalo } [0,\ 2,000]$$

Hallemos los números críticos de $C(x)$:

$$C'(x) = -\frac{3}{5}k + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + 640,000}}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}k + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + 640,000}} = 0 \Leftrightarrow 3k\sqrt{x^2 + 640,000} = 5kx$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x^2 + 640,000} = 5x \Rightarrow 9\left(x^2 + 640,000\right) = 25x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm 600$$

Sólo conservamos 600, ya que -600 no está en el intervalo $[0,\ 2,000]$. Ahora comparemos los valores de $C(0)$, $C(600)$ y $C(2,000)$:

$$C(0) = \frac{3}{5}k(2,000) + k\sqrt{640,000} = 2,000k$$

$$C(600) = \frac{3}{5}k(1,400) + k\sqrt{360,000 + 640,000} = 1,840k$$

$$C(2,000) = \frac{3}{5}k(0) + k\sqrt{4,000,000 + 640,000} = 400\sqrt{29}k \approx 2,154k$$

El costo mínimo es $1,840k$, y es alcanzado en el punto $x = 600$. Luego, el punto P debe localizarse entre la planta y el punto F, a 600 metros de éste.

Problema 4.6.5

El gerente de un hotel de 71 habitaciones ha observado que cuando la tarifa por habitación es $\$\,50$, todas las habitaciones son alquiladas; mientras que por cada $\$\,2$ de aumento en la tarifa, se desocupa una habitación. Si el mantenimiento (limpieza, lavado, etc.) de cada habitación ocupada es de $\$\,4$:

a. ¿qué tarifa debe cobrar el gerente para obtener la máxima ganancia?

b. ¿cuántas habitaciones se ocupan con la tarifa que da ganancia máxima?

Solución

Sea G la ganancia del hotel. Se tiene que:

$$G = (\text{hab. ocupadas})(\text{tarifa por habitación}) - 4(\text{hab. ocupadas})$$

Sea x el número de habitaciones desocupadas. Se debe cumplir que:

$$0 \leq x \leq 71$$

Se tiene que:

- El número de habitaciones ocupadas es $71 - x$
- El incremento en la tarifa por habitación es $2x$
- La tarifa por habitación es $50 + 2x$

Reemplazando estos valores en la igualdad inicial, tenemos:

$$G(x) = (71 - x)(50 + 2x) - 4(71 - x) \Rightarrow G(x) = 3,266 + 96x - 2x^2$$

Debemos hallar el máximo de:

$$G(x) = 3,266 + 96x - 2x^2, \quad \text{en el intervalo } [0, 71].$$

Hallemos los números críticos:

$$G'(x) = 96 - 4x \quad \text{y} \quad G'(x) = 0 \Rightarrow 96 - 4x = 0 \Rightarrow x = 24$$

24 es el único número crítico de $G(x)$, y está en contenido en $[0,\ 71]$.

Comparamos los valores de $G(0)$, $G(24)$ y $G(71)$:

$$G(0) = 3,266 + 96(0) - 2(0)^2 = 3,266$$

$$G(24) = 3,266 + 96(24) - 2(24)^2 = 4,418$$

$$G(71) = 3,266 + 96(71) - 2(71)^2 = 0$$

La ganancia máxima es $G(24) = 4,418$, y es alcanzada cuando $x = 24$. En consecuencia:

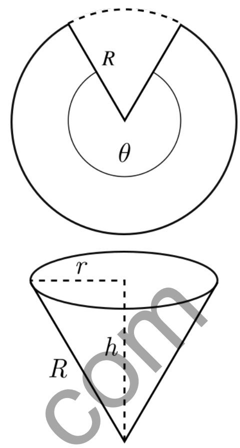
a. La tarifa que otorga máxima ganancia es $50 + 2(24) = 98$ dólares.

b. Con esta tarifa, de 98 dólares, se rentan $71 - 24 = 47$ habitaciones.

Problema 4.6.6

Se desea construir una copa cónica a partir de una lámina metálica circular de radio R. Hallar el ángulo central (θ) que proporcione la copa de capacidad máxima.

Solución



Si h es la altura de la copa y r, el radio de su base, entonces el volumen de la copa, por ser un cono, es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (1)$$

La longitud de la circunferencia de la base de la copa debe ser igual a la longitud del arco determinado por el ángulo θ. Esto es:

$$2\pi r = R\theta$$

De donde:

$$r = \frac{R\theta}{2\pi} \qquad (2)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$V = V(\theta) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2\left(\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}\right) = \frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \qquad (4)$$

Para nuestro problema debemos tener que $0 \leq \theta \leq 2\pi$; así que buscamos el máximo de:

$$V(\theta) = \frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}, \text{ en el intervalo } [0,\, 2\pi]$$

Puntos críticos:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{R^3}{24\pi^2}\left[\theta^2\frac{-\theta}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} + 2\theta\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}\right] = \frac{R^3}{24\pi^2}\left[-\frac{\theta\left(3\theta^2 - 8\pi^2\right)}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}}\right]$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \theta\left(3\theta^2 - 8\pi^2\right) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \quad \text{o} \quad 3\theta^2 - 8\pi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \quad \text{o} \quad \theta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ahora, comparemos los valores $V(0)$, $V(2\pi)$ y $V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$:

$$V(0) = \frac{R^3}{24\pi^2}(0)^2\sqrt{4\pi^2 - (0)^2} = 0$$

$$V(2\pi) = \frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi)^2\sqrt{4\pi^2 - (2\pi)^2} = 0$$

$$V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\sqrt{4\pi^2 - \left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}R^3$$

El máximo de $V(\theta)$ es:

$$V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}R^3$$

Este es alcanzado en $\theta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. Luego, el ángulo central buscado es:

$$\theta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 2.565\ rad \approx 146.7^\circ$$

Problema 4.6.7

Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima, con lados paralelos a los ejes, que se inscribe en la elipse:

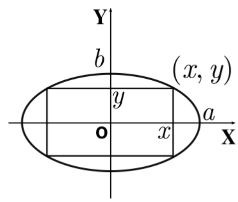
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución

Consideremos un rectángulo cualquiera, inscrito en la elipse y con lados paralelos a los ejes.

Sea (x, y), el vértice del rectángulo en el primer cuadrante. El área de este rectángulo es:

$$A = 4xy$$



Despejamos y en la ecuación de la elipse:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Reemplazando este valor en la ecuación del área del rectángulo:

$$A(x) = 4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

Es claro que $0 \leq x \leq a$, así que debemos hallar el máximo de:

$$A(x) = 4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ en el intervalo } [0,\, a].$$

Hallemos los números críticos:

$$A'(x) = 4\frac{b}{a}x\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 4\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = 4\frac{b}{a}\frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Desechamos $-\frac{a\sqrt{2}}{2}$ por no estar en el intervalo $[0,\, a]$.

Comparemos los valores de $A(0)$, $A(a)$ y $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$A(0) = 4\frac{b}{a}(0)\sqrt{a^2 - (0)^2} = 0 \qquad A(a) = 4\frac{b}{a}(a)\sqrt{a^2 - a^2} = 0$$

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 4\frac{b}{a}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2ab$$

Luego, el máximo de $A(x)$ es $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 2ab$, y es alcanzado en $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

El valor de y, correspondiente a este valor de x, es:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

En consecuencia, las dimensiones del rectángulo buscado son:

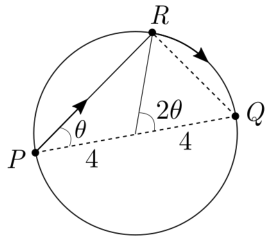
$$2x = a\sqrt{2} \quad \text{y} \quad 2y = b\sqrt{2}$$

Problema 4.6.8

En la orilla de un lago circular de 4 kilómetros de radio se encuentran dos puntos *diametralmente opuestos*, P y Q.

Un pescador se encuentra en el punto P, y quiere llegar en el menor tiempo al punto Q. Si el pescador puede remar a razón de 4 km/h. y puede caminar a razón de 8 km/h. ¿con qué ángulo θ debe remar para alcanzar el punto R y, luego, caminar hacia Q?

Solución



Si t_1 es el tiempo transcurrido remando, t_2 es el tiempo transcurrido caminando, y T es el tiempo total, entonces tenemos que:

$$T = t_1 + t_2 \qquad (1)$$

El tiempo t_1 es igual a la distancia de P a R, dividida entre la velocidad del pescador remando. Esto es:

$$t_1 = \frac{d(P,R)}{4}$$

Considerando que el ángulo $\angle PRQ$ es recto (todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es recto), se tiene que $d(P,R) = 8\cos\theta$, por lo tanto:

$$t_1 = 2\cos\theta \qquad (2)$$

Por otro lado, el tiempo t_2 es igual a la longitud del arco $\widehat{RQ}$, dividida entre la velocidad del pescador caminando. Esto es:

$$t_2 = \frac{\text{Longitud de arco } \widehat{RQ}}{8}$$

Pero,

$$\text{Longitud del arco } \widehat{RQ} = 4(\text{ángulo central}) = 4(2\theta) = 8\theta$$

Por lo tanto:

$$t_2 = \theta \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), conseguimos:

$$T = 2\cos\theta + \theta$$

Es claro que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Quiere decir que debemos hallar el mínimo de:

$$T(\theta) = 2\cos\theta + \theta \quad \text{ en el intervalo } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Hallemos los números críticos:

$$T'(\theta) = -2\,\text{sen}\,\theta + 1$$

$$T'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -2\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}\ rad$$

Comparemos $T(0)$, $T\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $T\left(\frac{\pi}{6}\right)$:

$$T(0) = 2\cos(0) + 0 = 2 \text{ horas}$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = 2(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \text{ horas}$$

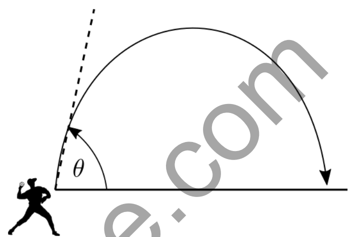
$$T\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2.25 \text{ horas}$$

Luego, el mínimo es $T\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1.57$ horas, y es alcanzado en $\theta = \frac{\pi}{2}$. En consecuencia, el pescador debe salir con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$. Esto significa que le conviene más olvidarse de su embarcación y bordear el lago caminando.

Problema 4.6.9

El alcance de una pelota arrojada por un beisbolista está gobernado por la siguiente función:

$$A(\theta) = \frac{{V_0}^2}{g}\,\text{sen}\,2\theta,$$



θ es el ángulo de inclinación con que se lanza la pelota, g es la aceleración de la gravedad y v_0 es la velocidad inicial con la que es lanzada la pelota. Hallar el ángulo que proporcione el máximo alcance.

Solución

Debemos hallar el máximo de:

$$A(\theta) = \frac{{V_0}^2}{g}\text{sen}\,2\theta \quad \text{en} \quad \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Hallemos los números críticos:

$$A'(\theta) = 2\frac{{V_0}^2}{g}\cos 2\theta$$

$$A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\frac{{V_0}^2}{g}\cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Comparemos los valores $A(0)$, $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$A(0) = \frac{{V_0}^2}{g}\,\text{sen}\,2(0) = 0 \qquad A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{{V_0}^2}{g}\,\text{sen}\,2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{{V_0}^2}{g}\,\text{sen}\,\pi = 0$$

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{{V_0}^2}{g}\,\text{sen}\,2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{{V_0}^2}{g}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \frac{{V_0}^2}{g}$$

El máximo es $A\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{{V_0}^2}{g}$, que es alcanzado en $\theta = \frac{\pi}{4}$. Así que para lograr el máximo alcance, la pelota debe lanzarse con un ángulo de inclinación de $\frac{\pi}{4}$ Radianes, o bien, 45°.

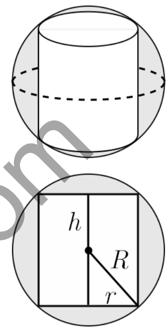
Problema 4.6.10

Hallar las dimensiones del cilindro circular recto *de volumen máximo* que se puede inscribir en la esfera de radio R.

Solución

Si r es el radio del cilindro, h es su altura y V es su volumen, entonces tenemos que:

$$V = (\text{área de la base})(\text{altura}) = \pi r^2 h \qquad (1)$$



Por Pitágoras, se tiene:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 - r^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\Rightarrow V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

Es claro que $0 \leq r \leq R$. Debemos hallar el máximo de:

$$V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{en } [0,\ R]$$

Hallemos los números críticos:

$$V'(r) = 2\pi r^2 \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} + 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{2\pi r\left(2R^2 - 3r^2\right)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi r\left(2R^2 - 3r^2\right)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \Rightarrow 2\pi r\left(2R^2 - 3r^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \quad \text{o} \quad 2R^2 - 3r^2 = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{o} \quad r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

Además, $V'(r)$ no está definida en $r = R$. Así que los puntos críticos de $V(r)$ en $[0,\ R]$ son: $0,\ \frac{R\sqrt{6}}{3}$ y R.

Comparemos $V(0)$, $V(R)$ y $V\left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)$:

$$V(0) = 2\pi(0)^2\sqrt{R^2 - (0)^2} = 0 \qquad V(R) = 2\pi R^2\sqrt{R^2 - R^2} = 0$$

$$V\left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right) = 2\pi\left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}R^3$$

Luego, el máximo es $V\left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}R^3$, y es alcanzado en $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$

Por otro lado, sabemos que $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. Luego:

$$h = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

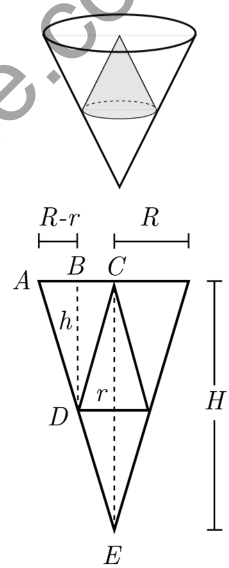
Por lo tanto, las dimensiones del cilindro buscado son:

$$\text{radio} = \frac{R\sqrt{6}}{3} \approx 0.817R, \qquad \text{altura} = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \approx 1.155R$$

Problema 4.6.11

Probar que el volumen del mayor cono circular recto inscrito en otro cono circular recto es equivalente a la razón $\frac{4}{27}$ del volumen del cono grande.

Solución



Si r es el radio, h es la altura y V es el volumen del cono pequeño, mientras que R es el radio, H es la altura y V_1 es el volumen del cono grande; entonces tenemos:

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h \quad \textbf{(1)} \qquad V_1 = \frac{\pi}{3}R^2H \quad \textbf{(2)}$$

Los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACE$ son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R} \Rightarrow h = \frac{H}{R}(R-r) \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$V = \frac{\pi}{3}r^2\frac{H}{R}(R-r) = \frac{\pi H}{3R}r^2(R-r)$$

Es evidente que $0 \leq r \leq R$. Busquemos el máximo de $V(r)$:

$$V(r) = \frac{\pi H}{3R}r^2(R-r) \quad \text{en} \ [0,\, R]$$

Hallemos los números críticos:

$$V'(r) = \frac{\pi H}{3R}\left[r^2(-1) + 2(R-r)r\right] = \frac{\pi H}{3R}\left[2rR - 3r^2\right] = \frac{\pi H}{3R}r[2R-3r]$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{o} \quad 2R - 3r = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{o} \quad r = \frac{2}{3}R$$

Comparemos $V(0)$, $V(R)$ y $V\left(\frac{2}{3}R\right)$:

$$V(0) = \frac{\pi H}{3R}(0)^2(R-0) = 0 \qquad\qquad V(R) = \frac{\pi H}{3R}R^2(R-R) = 0$$

$$V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{\pi H}{3R}\left(\frac{2R}{3}\right)^2\left(R - \frac{2R}{3}\right) = \frac{4}{81}\pi R^2 H$$

Luego, el máximo es $V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{81}\pi R^2 H$. Ahora, teniendo en cuenta (2):

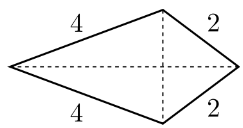
$$V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{81}\pi R^2 H = \frac{4}{27}\left[\frac{\pi}{3}R^2 H\right] = \frac{4}{27}V_1$$

Esto es, el volumen del cono pequeño es $\frac{4}{27}$ del volumen del cono grande.

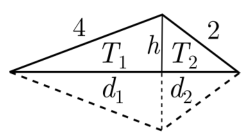
Problema 4.6.12

Se quiere hacer el marco de un cometa con seis piezas de hilo nailon. Las cuatro piezas exteriores ya han sido cortadas; dos de 4 *dm*. y dos 2 *dm* (como indica la figura). Hallar la longitud que las diagonales deben tener si se quiere un cometa de área máxima.

Solución



La diagonal más larga divide al cometa en dos triángulos simétricos, así que las dos diagonales dividen al cometa en cuatro triángulos rectángulos. Si h es la mitad de la longitud de la diagonal menor, se tiene que $0 \leq h \leq 2$. Ahora, el área del triángulo $\triangle T_1$ es:



$$T_1 = \frac{1}{2}d_1 h = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 - h^2}\,h$$

El área del triángulo $\triangle T_2$ es:

$$T_2 = \frac{1}{2}d_2 h = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 - h^2}\,h$$

El área (A) del cometa es igual a dos veces el área de T_1, más dos veces el área de de T_2. Luego:

$$A = h\sqrt{4^2 - h^2} + h\sqrt{2^2 - h^2} = \left(\sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2}\right)h$$

En resumen, buscamos el máximo de:

$$A(h) = \left(\sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2}\right)h \quad \text{en el intervalo } [0,\, 2]$$

Hallemos los números críticos:

$$\begin{aligned}
A'(h) &= \left(\sqrt{16-h^2}+\sqrt{4-h^2}\right)+\left(\frac{-h}{\sqrt{16-h^2}}+\frac{-h}{\sqrt{4-h^2}}\right)h \\
&= \left(\sqrt{16-h^2}+\sqrt{4-h^2}\right)-\left(\frac{\sqrt{4-h^2}+\sqrt{16-h^2}}{\sqrt{16-h^2}\sqrt{4-h^2}}\right)h^2 \\
&= \left(\sqrt{16-h^2}+\sqrt{4-h^2}\right)\left(1-\frac{h^2}{\sqrt{16-h^2}\sqrt{4-h^2}}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{16-h^2}+\sqrt{4-h^2}}{\sqrt{16-h^2}\sqrt{4-h^2}}\right)\left(\sqrt{16-h^2}\sqrt{4-h^2}-h^2\right)
\end{aligned}$$

$$A'(h)=0 \Rightarrow \sqrt{16-h^2}\sqrt{4-h^2}=h^2 \Rightarrow \left(16-h^2\right)\left(4-h^2\right)=h^4$$

$$\Rightarrow 64-20h^2=0 \Rightarrow h^2=\frac{64}{20}=\frac{16}{5} \Rightarrow h=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Tenemos sólo un número crítico: $h=\frac{4}{\sqrt{5}}$

Comparemos $A(0)$, $A(2)$ y $A\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$:

$$\begin{aligned}
A(0) &= \left(\sqrt{16-(0)^2}+\sqrt{4-(0)^2}\right)(0)=0 \\
A(2) &= \left(\sqrt{16-(2)^2}+\sqrt{4-(2)^2}\right)(2)=4\sqrt{3}\approx 6.93 \\
A\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) &= \left(\sqrt{16-\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}+\sqrt{4-\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \left(\frac{8}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)=8
\end{aligned}$$

Luego, $A\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)=8$ es el máximo absoluto. En consecuencia, las longitudes de las diagonales buscadas son:

$$\text{Diagonal menor}=2h=2\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}\approx 3.58\ dm$$

$$\text{Diagonal mayor}=d_1+d_2=\sqrt{16-\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}+\sqrt{4-\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

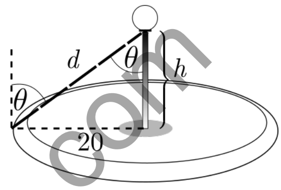
$$=\frac{10}{\sqrt{5}}\approx 4.47\ dm$$

Problema 4.6.13

Se va a instalar un poste con un faro en el centro de una plazoleta circular que tiene 20 metros de radio ¿A qué altura debe estar el faro para que ilumine, lo mejor posible, la vereda que rodea la plazoleta?

Se sabe que la iluminación I de la plazoleta es directamente proporcional al coseno del ángulo (θ) de incidencia de los rayos luminosos, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (d) del faro a la plazoleta.

Solución



Nos dicen que $I(\theta) = k\frac{\cos\theta}{d^2}$, donde k es una constante. De acuerdo a la figura:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{20}{d} \Rightarrow d = \frac{20}{\operatorname{sen}\theta}$$

Reemplazando este valor d en la ecuación de iluminación:

$$I(\theta) = k\frac{\cos\theta}{\left(\frac{20}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2} = \frac{k}{400}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$$

Debemos optimizar:

$$I(\theta) = \frac{k}{400}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \quad \text{en el intervalo} \quad \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

Hallemos los números críticos:

$$\begin{aligned} I'(\theta) &= \frac{k}{400}\left[\cos\theta(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + \operatorname{sen}^2\theta(-\operatorname{sen}\theta)\right] \\ &= \frac{k}{400}\operatorname{sen}\theta\left[2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right] \end{aligned}$$

$$I'(\theta) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{o} \quad 2\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$$

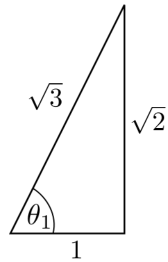
$$\Rightarrow \theta = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \theta = 0 \quad \text{o} \quad \tan^2\theta = 2 \Rightarrow \theta = 0 \quad \text{o} \quad \theta_1 = \tan^{-1}\sqrt{2} = 0.9553$$

Tenemos dos puntos críticos: $\theta = 0$ y $\theta_1 = \tan^{-1}\sqrt{2} = 0.9553$

Comparemos: $I(0)$, $I\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $I(\theta_1) = I(0.9553)$:

$$\begin{aligned} I(0) &= \frac{k}{400}\cos(0)\text{sen}^2(0) = \frac{k}{400}(1)(0) = 0 \\ I\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{k}{400}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k}{400}(0)(1)^2 = 0 \end{aligned}$$



$$I(\theta_1) = \frac{k}{400}\cos(\theta_1)\,\text{sen}^2(\theta_1) = \frac{k}{400}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{k}{600\sqrt{3}} \approx 0.00096k$$

Luego, $I(\theta_1) = I(0.9553) = 0.00096k$ es el máximo.

Por otro lado, se tiene:

$$\tan\theta = \frac{20}{h} \Rightarrow h = \frac{20}{\tan\theta}$$

En particular, tomando $\theta = \theta_1$, y sabiendo que $\tan\theta_1 = \sqrt{2}$, se tiene:

$$h = \frac{20}{\tan\theta_1} = \frac{20}{\sqrt{2}} \approx 14.14\ m$$

En conclusión, la máxima iluminación en el corredor de la plazoleta se obtiene al ubicar el faro a 14.14 metros de altura.

PROBLEMAS DE EXTREMOS EN INTERVALOS ABIERTOS O SEMICERRADOS

En esta parte vamos a emplear el teorema 4.3.5 para la resolución de problemas prácticos, expresados mediante funciones cuyos dominios son intervalos abiertos o semicerrados. Este teorema afirma que un extremo local único es un extremo absoluto.

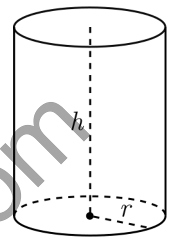
Problema 4.6.14

Una fábrica de envases para alimentos necesita fabricar envases de estaño con tapa que tengan la forma de un cilindro circular recto, y un volumen de $250\pi\ cm^3$. Hallar las dimensiones que debe tener el envase si se quiere usar la mínima cantidad de estaño en su construcción.

Solución

Si A es el área total de las paredes del envase, entonces el envase de cantidad mínima de estaño es el que tiene área A mínima.

Si r es el radio de la base y h es la altura, entonces el área A es la suma de las áreas de las dos bases, que es $2\pi r^2$, más el área de la superficie lateral $2\pi rh$.



Esto es:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (1)$$

Por otro lado, el volumen del cilindro circular recto es:

$$V = \pi r^2 h$$

En nuestro caso, como $V = 250\pi$, tenemos que:

$$\pi r^2 h = 250\pi \Rightarrow r^2 h = 250 \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$$

Reemplazando este valor de h en (1):

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{r^2} \Rightarrow A = 2\pi\left(r^2 + \frac{250}{r}\right)$$

Vemos que la función A no está definida para $r = 0$. Además, como el radio no puede ser negativo, debemos tener que $r > 0$. En consecuencia, el problema consiste en hallar el mínimo de la función área:

$$A(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{250}{r}\right) \quad \text{en el intervalo abierto } (0, +\infty)$$

Hallemos los números críticos:

$$A'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{250}{r^2}\right) = 4\pi\left(\frac{r^3 - 125}{r^2}\right)$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow r^3 - 125 = 0 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow r = 5$$

$A'(r)$ no está definida en 0, pero 0 no está contenido en $(0, +\infty)$

El único punto crítico de $A(r)$ en el intervalo $(0, +\infty)$ es 5, así que aplicaremos el criterio de la segunda derivada a $r = 5$:

$$A''(r) = 2\pi\left(2 + \frac{500}{r^3}\right) \Rightarrow A''(5) = 2\pi\left(2 + \frac{500}{5^3}\right) = 12\pi > 0$$

Luego, $A(5) = 150\pi$ es un mínimo local.

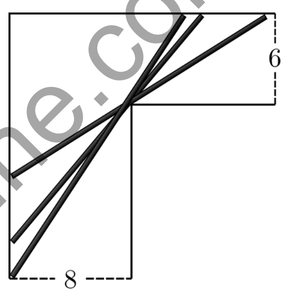
Como éste es el único extremo local de la función $A(r)$ en $(0, +\infty)$, se concluye que $A(5) = 150\pi$ es el mínimo absoluto. En consecuencia, las dimensiones buscadas del envase son:

$$\text{radio} = r = 5\ cm \qquad \text{altura} = h = \frac{250}{(5)^2} = 10\ cm$$

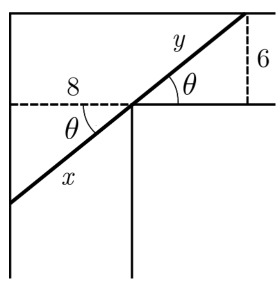
Problema 4.6.15

Un establecimiento comercial tiene dos corredores, de 6 y 8 metros de ancho, que conforman una esquina. Hallar la longitud del tubo de mayor longitud posible que pueda pasar horizontalmente por la esquina.

Solución



Tracemos los segmentos que tocan, tanto al vértice interior, como a los lados exteriores de los corredores. Estos segmentos tienen distintas longitudes, pero la longitud que buscamos corresponde a la longitud mínima de ellos. Tomemos uno de los segmentos.



La esquina divide a este segmento en dos partes, cuyas longitudes las denotamos por x e y respectivamente.

Si L es la longitud del segmento, tenemos que:

(1) $L = x + y$ **(2)** $x = 8 \sec\theta$

(3) $y = 6 \operatorname{cosec}\theta$

Reemplazando (2) y (3) en (1), obtenemos:

$$L(\theta) = 8 \sec\theta + 6 \operatorname{cosec}\theta \qquad (4)$$

$L(\theta)$ no está definida en 0 ni en $\frac{\pi}{2}$. Esto es:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Nuestra tarea es encontrar el mínimo absoluto de la función:

$$L(\theta) = 8 \sec\theta + 6 \operatorname{cosec}\theta \quad \text{en} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Hallemos los números críticos:

$$\boldsymbol{L'(\theta) = 8\sec\theta\tan\theta - 6\,\mathrm{cosec}\,\theta\cot\theta}$$

$$L'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 8\sec\theta\tan\theta = 6\,\mathrm{cosec}\,\theta\cot\theta \Leftrightarrow 8\frac{1}{\cos\theta}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} = 6\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{sen}^3\,\theta}{\cos^3\theta} = \frac{6}{8} \Leftrightarrow \tan^3\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)$$

$L(\theta)$ tiene un único punto crítico en el intervalo abierto $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, que es:

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right) \approx 0.7376\ rad \approx 42°15'25"$$

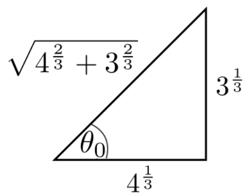
Analicemos la naturaleza del punto crítico:

$$L''(\theta) = 8\left[\sec\theta\tan^2\theta\sec^3\theta\right] + 6\left[\mathrm{cosec}\,\theta\cot^2\theta + \mathrm{cosec}^3\,\theta\right]$$

θ_0 está en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, donde todas la funciones trigonométricas son positivas. En consecuencia, $L''(\theta_0) > 0$, así que $L(\theta_0)$ es un mínimo local. Además, por ser el único extremo local en $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, concluimos que $L(\theta_0)$ es el mínimo absoluto.

Construimos el triángulo adjunto considerando que:

$$\tan\theta_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}},$$



Ahora,

$$L(\theta_0) = 8\sec\theta_0 + 6\,\mathrm{cosec}\,\theta_0 = 8\frac{\left(4^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}} + 6\frac{\left(4^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}}$$

$$= 2(4)^{\frac{2}{3}}\left(4^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + 2(3)^{\frac{2}{3}}\left(4^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(4^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)\left(4^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(4^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

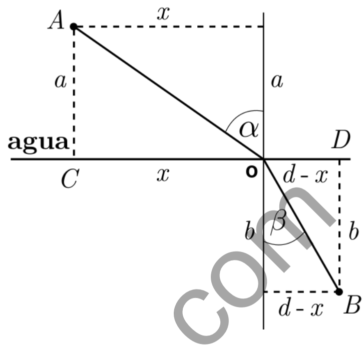
$$= 2\left(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 9.87\ m.$$

En conclusión, la longitud del tubo de mayor longitud posible que puede pasar horizontalmente por esta esquina es 9.87 metros.

Problema 4.6.16 Refracción de la luz.

El **principio de Fermat** en *óptica* dice que la luz va de un punto a otro por el camino que requiere la menor cantidad de tiempo.

Se tiene un punto A que se encuentra a $\boldsymbol{a}$ metros por encima de la superficie de una piscina, y un punto B que está sumergido en el agua a $\boldsymbol{b}$ metros de profundidad.



Desde A parte un rayo que toca la superficie del agua en un punto **O**, cambia de dirección y pasa por el punto B. El ángulo $\angle\alpha$ es el ángulo de **incidencia**, mientras que el ángulo $\angle\beta$ es el de **refracción**.

Si la luz se propaga en el aire a una velocidad v_1, y en el agua a una velocidad v_2, usando el **principio de Fermat**, probar que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

Solución

Sean x la distancia de C a O, d la distancia de C a D, y $T = T(x)$ el tiempo que toma el rayo de luz para llegar desde A hasta B, pasando por el punto O. Sean t_1 y t_2 los tiempos que toma el rayo de luz para llegar de A a O y de O a B respectivamente. Tenemos que:

$$\text{Longitud de } \overline{A\mathrm{O}} = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{y} \quad \text{Longitud de } \overline{\mathrm{O}B} = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

Luego:

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \qquad \text{y} \qquad t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Como $T(x) = t_1 + t_2$, entonces:

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Si el camino escogido es el que da tiempo mínimo, debe cumplirse que:

$$T'(x) = 0$$

Tenemos que:

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

Luego:

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \tag{1}$$

Pero:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{sen}\alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = \operatorname{sen}\beta$$

Reemplazando estos valores en (1), se tiene:

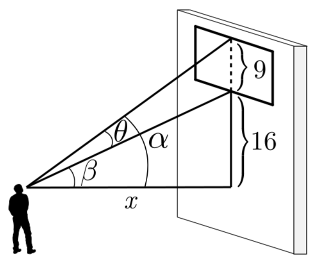
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{v_2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

Problema 4.6.17

Un aviso comercial de 9 metros de altura está pintado sobre una pared vertical. Si la base del aviso se encuentra 16 metros por encima del ojo de un observador ¿a qué distancia de la pared debe estar el observador para que el ángulo formado por el ojo y los extremos superior e inferior del aviso sea máximo?

Solución

Sea x la distancia entre el observador y la pared, y sea θ el ángulo formado por el ojo del observador y los extremos superior e inferior del aviso. Se tiene que:



$$\theta = \alpha - \beta$$

Donde:

$$\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{25} \quad \text{y} \quad \beta = \cot^{-1}\frac{x}{16}$$

Luego

$$\theta = \cot^{-1}\frac{x}{25} - \cot^{-1}\frac{x}{16}$$

Debemos hallar un valor de x en el intervalo $(0, +\infty)$, para el cual la función anterior nos arroje un valor máximo absoluto.

Derivamos la función respecto a x:

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{25}\right)^2}\left(\frac{1}{25}\right) + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{16}\right)^2}\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{25}{25^2+x^2} + \frac{16}{16^2+x^2}$$

Números críticos:

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \Leftrightarrow -\frac{25}{25^2 + x^2} + \frac{16}{16^2 + x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{25^2 + x^2} = \frac{16}{16^2 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow 25\left(16^2 + x^2\right) = 16\left(25^2 + x^2\right) \Leftrightarrow 9x^2 = 3,600 \Rightarrow x = 20$$

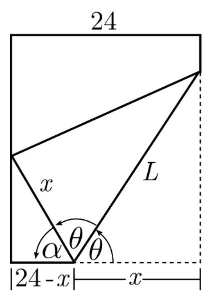
Al aplicar el criterio de la primera o de la segunda derivada, se verifica que el punto crítico $x = 20$ corresponde a un máximo relativo.

Además, como $x = 20$ es el único extremo relativo en el intervalo $(0, +\infty)$, estamos frente al máximo absoluto. Por lo tanto, el observador debe colocarse a 20 metros de la pared para obtener un ángulo máximo.

Problema 4.6.18

En una hoja de papel de 24 centímetros de ancho, se dobla una esquina hasta tocar el lado opuesto ¿En que parte debe doblarse la hoja para que la longitud L del doblez sea mínima? En otras palabras, hallar el valor de x que minimiza a L.

Solución



Tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{x}{L} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{24 - x}{x} &= \cos\alpha = \cos(\pi - 2\theta) \\
&= \cos(\pi + (-2\theta)) \\
&= -\cos(-2\theta) && \text{(Id. trigonom. 20)} \\
&= -\cos 2\theta \\
&= -\left(2\cos^2\theta - 1\right) && \text{(Id. trigonom. 28)} \\
&= 1 - 2\cos^2\theta = 1 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 && \text{(por (1))} \\
&= \frac{L^2 - 2x^2}{L^2}
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\frac{24 - x}{x} = \frac{L^2 - 2x^2}{L^2} \Rightarrow L^2(24 - x) = x\left(L^2 - 2x^2\right) \Rightarrow L^2 = \frac{x^3}{x - 12}$$

$$\Rightarrow L = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x - 12}}$$

Por otro lado, para que la esquina doblada alcance el lado opuesto en un punto que no sea la otra esquina inferior, debemos tener que $12 < x$. En consecuencia, la función a minimizar es:

$$L(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-12}} \text{ en el intervalo } (12, +\infty)$$

Bien:

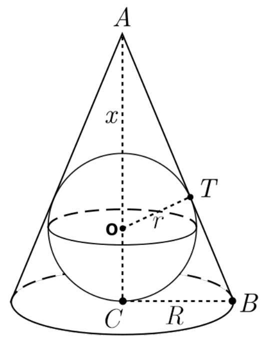
$$L'(x) = \frac{\sqrt{x-12}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) - x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x-12}}}{x-12} \Rightarrow L'(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}(x-18)}{(x-12)^{\frac{3}{2}}}$$

Vemos que $L(x)$ tiene tres números críticos: 0, 12 y 18, pero sólo 18 está en el intervalo $(12, +\infty)$. Además, el criterio de la primera derivada nos asegura que $L(18)$ es un mínimo local que, asimismo, es el único extremo local en $(12, +\infty)$, $L(18)$; por lo tanto, también es mínimo absoluto. Luego, $x = 18$ es el número buscado.

Problema 4.6.19

Hallar la dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que se puede circunscribir en una esfera de radio r.

Solución



Sean:

- R: radio del cono
- h: altura del cono
- x: la longitud de $\overline{\text{O}A}$

Los triángulos rectángulos $\triangle ACB$ y $\triangle AT\text{O}$ son semejantes, ya que tienen un ángulo agudo común. Luego:

$$\frac{R}{r} = \frac{x+r}{\sqrt{x^2-r^2}} \Rightarrow R = \frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2-r^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{r^2(x+r)^2}{x^2-r^2} = \frac{r^2(x+r)^2}{(x+r)(x-r)}$$

$$= \frac{r^2(x+r)}{x-r}$$

El volumen del cono es:

$$V = \frac{\pi}{3}R^2h = \frac{\pi}{3}\frac{r^2(x+r)}{x-r}(x+r) = \frac{\pi}{3}\frac{r^2(x+r)^2}{x-r}$$

Como el cono es circunscrito, se debe cumplir que $x > r$, así que debemos optimizar:

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{r^2(x+r)^2}{x-r} \quad \text{en el intervalo } (r,\, +\infty)$$

Derivando:

$$V'(x) = \frac{\pi r^2}{3}\frac{(x-r)(2)(x+r)-(x+r)^2}{(x-r)^2} = \frac{\pi r^2}{3}\frac{(x+r)(x-3r)}{(x-r)^2}$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x + r = 0 \ \text{ o } \ x - 3r = 0 \Rightarrow x = -r \ \text{ o } \ x = 3r$$

Los números críticos son: $-r$ y $3r$. Pero en $(r,\, +\infty)$ sólo está $3r$.

El criterio de la primera derivada nos dice $V(3r)$ es un mínimo local en $(r,\, +\infty)$; además, por ser único, es un mínimo absoluto en $(r,\, +\infty)$. En consecuencia, las dimensiones del cono buscado son:

$$h = x + r = 3r + r = 4r$$

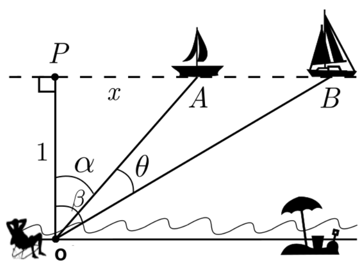
$$R = \frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{r(3r+r)}{\sqrt{(3r)^2-r^2}} = \frac{4r^2}{\sqrt{8r^2}} = \frac{4r^2}{2r\sqrt{2}} = \sqrt{2}r$$

Problema 4.6.20

Un bañista que se encuentra en un punto O de una playa observa dos veleros, A y B, que están detenidos en un punto P, situado exactamente frente al observador, a 1 kilómetro de distancia.

Los veleros comienzan a navegar siguiendo una trayectoria paralela a la playa. Si el velero B es 3 veces más rápido que el velero A, hallar el máximo valor del ángulo de observación θ entre los dos veleros.

Solución



Si β es el ángulo $\angle PO B$, y α es el ángulo $\angle POA$, entonces:

$$\theta = \beta - \alpha$$

Si x es la distancia de P al velero A, entonces $3x$ es la distancia del punto P al velero B. Aún más, tenemos que:

$$\tan\alpha = x \quad \text{y} \quad \tan\beta = 3x$$

De acuerdo al identidad trigonométrica 25, se tiene:

$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{3x - x}{1 + (3x)(x)} = \frac{2x}{1 + 3x^2}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1 + 3x^2}\right)$$

Optimizamos la siguiente función:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1 + 3x^2}\right) \quad \text{en el intervalo } [0, +\infty) \tag{1}$$

Derivando:

$$\theta' = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)^2} D_x\left(\frac{2x}{1 + 3x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)^2} \frac{2\left(1 - 3x^2\right)}{\left(1 + 3x^2\right)^2} = \frac{2\left(1 - 3x^2\right)}{9x^4 + 10x^2 + 1} = \frac{2\left(1 + \sqrt{3}x\right)\left(1 - \sqrt{3}x\right)}{9x^4 + 10x^2 + 1}$$

Esto es:

$$\theta' = \frac{2\left(1 + \sqrt{3}x\right)\left(1 - \sqrt{3}x\right)}{9x^4 + 10x^2 + 1} \tag{2}$$

$$\theta' = 0 \Rightarrow \frac{2\left(1 + \sqrt{3}x\right)\left(1 - \sqrt{3}x\right)}{9x^4 + 10x^2 + 1} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Desechamos $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ por estar fuera de $[0, +\infty)$.

El criterio de la primera derivada, aplicado en (2), nos dice que θ tiene un máximo local en $\frac{1}{\sqrt{3}}$, además, por ser único, éste es un máximo absoluto; así que el ángulo buscado es:

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + 1}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.6

1. **(Área Máxima)**. Hallar las dimensiones de un rectángulo de 72 metros de perímetro que encierra un área máxima.

2. **(Área Máxima)**. Probar que, entre todos los rectángulos de perímetro fijo, el que encierra un área máxima es el cuadrado.

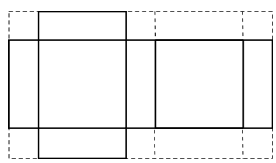
3. **(Área Máxima)**. Se quiere cercar un terreno rectangular que está a las orillas de un río. Si se cercan sólo tres lados del terreno y se cuenta con 400 metros de alambrada ¿qué dimensiones debe tener el terreno si se quiere que tenga área máxima?

4. **(Construcción de envases)**. Se construye cajas sin tapa utilizando láminas de cartón cuadrado de 96 centímetros de lado, a las cuales se recorta un pequeño cuadrado en cada esquina ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado cortado si se quiere que la caja tenga volumen máximo?

5. **(Construcción de envases)**. Se construyen cajas sin tapa utilizando láminas de cartón rectangulares de 21 por 16 centímetros, a las que se le recorta un pequeño cuadrado en cada esquina ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?

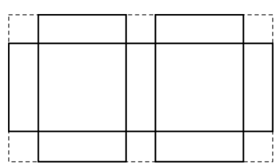
6. **(Construcción de envases)**. Se construyen cajas con tapa utilizando láminas de cartón rectangulares de 8 por 5 decímetros, a las que se les recortan los cuadrados y rectángulos marcados en la figura adjunta.

   ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?

7. **(Construcción de envases)**. Se construyen cajas con tapa y caras laterales.

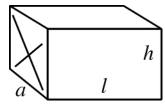
   Para esto, se usan láminas de cartón rectangulares de 9 por 6 decímetros, a las que se les recorta los 6 cuadrados indicados en la figura.

   ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?

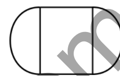
8. **(Volumen máximo)**. El reglamento de un servicio de encomiendas exige que la suma de las longitudes (largo, ancho y altura) de cada paquete no exceda 120 cm^3.

Hallar las dimensiones de la caja con base cuadrada que cumpla las regulaciones y tenga máximo volumen.



9. **(Pista de carreras)**. Se desea construir una pista de carreras de 560 metros que encierre un terreno rectangular, y tenga un semicírculo adjunto a cada uno de los lados opuestos del rectángulo.

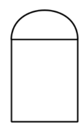
Encuentre las dimensiones del rectángulo si este debe tener área máxima,



10. **(Pista de carreras)**. Se desea construir una pista de carreras de 400 metros de longitud que encierre un terreno con la forma de un rectángulo con semicírculos adjuntos en dos de sus lados opuestos ¿Cuál es el área máxima que puede tener el terreno encerrado?

11. **(Máxima claridad)**. Se desea construir una ventana con perímetro de 7 metros que tenga la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo.

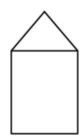
¿Qué dimensiones debe tener si se quiere que permita una máxima claridad?



Sugerencia: A mayor área, mayor claridad.

12. **(Máxima claridad)**. Una ventana de 18 pies de perímetro está conformada por un rectángulo coronado por un triángulo equilátero.

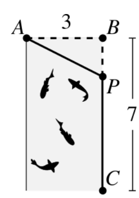
El vidrio que cubre el rectángulo es más claro que el que cubre el triángulo. Por pie cuadrado, el vidrio del rectángulo deja pasar el doble de luz del que cubre el triángulo.



Hallar las dimensiones de la ventana que permiten una máxima claridad.

13. **(Costo mínimo)**. Dos puntos A y B están opuestos, uno al otro, en las riberas de un río de 3 kilómetros de ancho.

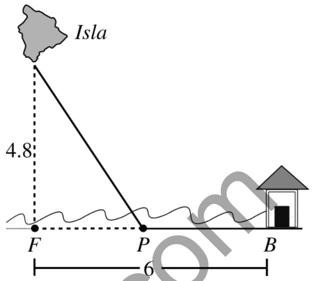
Un tercer punto C está en la misma ribera que B, pero a 7 kilómetros río abajo. Una compañía de telecomunicaciones desea unir los puntos A y C con cableado. Para esto, se debe tender dos cables: uno de A a un punto P, en la ribera opuesta, y el otro cable de P a C. El tendido del cable en el agua cuesta $\$17,000$ el kilómetro y en tierra cuesta $\$8,000$ el kilómetro.



¿Dónde debe estar localizado el punto P para que el costo sea mínimo?

14. (Costo mínimo). En el problema anterior, si el tendido de cable en el agua cuesta $\$13,000$ el kilómetro, y en tierra $\$12,000$ ¿dónde debe estar localizado el punto P?

15. (Tiempo mínimo).
Una isla se encuentra a 4.8 kilómetros de una playa recta, donde funciona una tienda ubicada a 6 kilómetros del punto F, frente la isla.



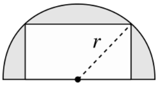
Un hombre que está en la isla quiere ir a la tienda. Si se sabe que el hombre rema a 3 km/h. y camina a 5 km/h ¿qué camino debe seguir para llegar a la tienda en el menor tiempo posible?

16. (Tiempo mínimo). En el problema anterior, si el hombre rema a razón de 4 km/h y camina a razón de 5 km/h. ¿qué camino debe seguir?

17. (Hotelera). El gerente de un hotel de 100 habitaciones sabe que cuando el precio por habitación es de $45, todas las habitaciones son rentadas, mientras que una habitación se desocupa por cada dólar de aumento. Si el precio de mantenimiento de una habitación ocupada es de $5 ¿cuántas habitaciones deben rentarse para obtener máxima ganancia? ¿Cuál debe ser el precio por habitación?

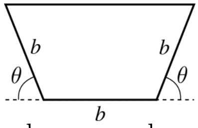
18. (Agricultura). Una granja está sembrada de mangos a razón de 80 plantas por hectárea. Cada planta produce un promedio de 960 mangos y el promedio de producción por planta se reduce en 10 mangos por cada planta adicional sembrada ¿Cuántas plantas se deben sembrar por hectárea para obtener la máxima producción?

19. (Área Máxima).
Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo de radio r.



20. (Volumen máximo). Se planea construir un canal de concreto para transportar agua a una granja.

La sección transversal del canal es como se indica en la figura, teniendo la base y las paredes laterales una misma longitud b.

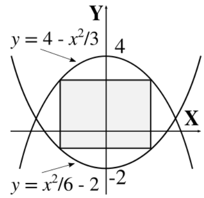


Hallar el ángulo θ que permite que el canal transporte el mayor volumen de agua.

Sugerencia: Exprese el área del trapecio en términos de θ y maximice.

21. **(Área Máxima)**. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, que puede inscribirse en la región acotada por las parábolas:

$$y = 4 - \frac{x^2}{3}, \quad y = \frac{x^2}{6} - 2$$

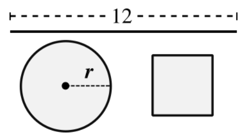


22. **(Resistencia Máxima)**. De un tronco circular de radio 3 decímetros, se quiere cortar una viga rectangular de máxima resistencia. Hallar las dimensiones del rectángulo si se sabe que la resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura. Es decir, $R = kah^2$, donde R es la resistencia, k es una constante de proporcionalidad, a es el ancho del rectángulo y h su altura.

23. **(Área Mínima)**. Un trozo de alambre de 12 metros se corta en dos partes. Una parte se doblará para formar una circunferencia y la otra se doblará para formar un cuadrado ¿Dónde se debe hacer el corte si:

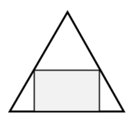
a. la suma de las áreas es mínima?

b. la suma de las áreas es máxima?



24. **(Área Máxima)**.

Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo equilátero de 12 centímetros de lado, de modo que un lado del rectángulo descanse sobre un lado del triángulo.

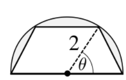


25. **(Área Máxima)**. Probar que, entre todos los triángulos isósceles de perímetro fijo, el que tiene área máxima es un triángulo equilátero.

26. **(Área Máxima)**. Probar que, entre todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia, el que tiene área máxima es un triángulo equilátero.

27. **(Área Máxima)**.

Se inscribe un trapecio en un semicírculo de radio 2, de tal forma que un lado del trapecio coincide con el diámetro. Hallar máxima área posible del trapecio.



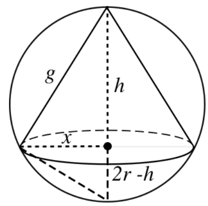
28. **(Área lateral máxima)**. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de área lateral máxima inscrito en una esfera de radio r.

29. (Volumen máximo). Hallar las dimensiones del cono circular recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio r.

Sugerencia: $V =$ *Volumen del cono* $= \frac{1}{3}\pi x^2 h$

Por semejanza de triángulos: $x^2 = h(2r - h)$

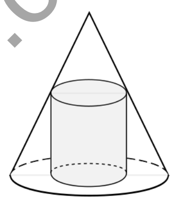
Luego: $V = \frac{1}{3}\pi h^2(2r - h)$



30. (Área lateral máxima). Hallar las dimensiones del cono circular recto de área lateral máxima inscrito en una esfera de radio r (vea la figura del problema anterior).
Sugerencia: $A =$ *Area lateral del cono* $= \pi x g$.

31. (Volumen máximo).

Probar que el volumen del mayor cilindro circular recto inscrito en un cono circular recto es $\frac{4}{9}$ del volumen del cono.

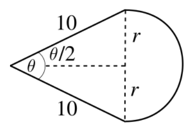


32. (Área máxima). Se construye una figura conformada por un triángulo isósceles de 10 centímetros de lado, al que se le adjunta un semicírculo, como indica el dibujo adjunto. Hallar:

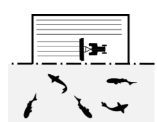
a. el ángulo θ correspondiente a la figura de área máxima.

b. el área máxima.

Sugerencia: Ver el problema resuelto 1.1.5.

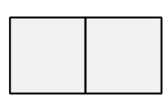


33. (Cerco mínimo). Se quiere construir una pequeña granja rectangular de 7.200 m^2 de área en la orilla de un río.
Si sólo se requiere cercar tres lados (como indica la figura) ¿que longitudes deben tener estos lados si quiere invertir la menor cantidad de material en el cerco?



34. (Cerco mínimo). Se quiere cerrar un terreno rectangular y luego dividirlo en dos partes iguales mediante una cerca, como indica la figura.

El área de terreno encerrado debe ser de 864 m^2.
Si se desea utilizar la mínima cantidad de cerca ¿qué dimensiones debe tener el rectángulo?



35. **(Área mínima)**. Se quiere construir una caja cerrada de madera de 72 dm^3 de volumen, mientras su base debe ser un rectángulo cuyo largo sea el doble de su ancho.

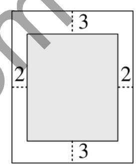
a. ¿Qué dimensiones debe tener la caja si se quiere que la cantidad de madera de su composición sea mínima?

b. ¿Qué dimensiones debe tener la caja si no tiene tapa?

36. **(Área mínima)**. Se quiere imprimir un libro en el que los márgenes de sus páginas sean: 3 cm superior e inferior y 2 cm de cada lado.

El texto escrito debe ocupar un área de 294 cm^2.

Si se busca economizar papel ¿qué dimensiones de la página son las más convenientes?



37. **(Área máxima)**. Se tiene un terreno rectangular de 480 m^2. sobre el cual se va a construir una casa que también tendrá forma rectangular. Para los jardines se dejaran 5 metros de frente, 5 metros atrás y 4 metros a los costados. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que el área de la casa sea máxima?

38. **(Área mínima)**. Para envasar sus productos, una compañía necesita envases cilíndricos de hojalata de $2\pi\ dm^3$ de capacidad y con tapa. Si se busca usar la mínima cantidad de hojalata ¿qué dimensiones debe tener cada envase?

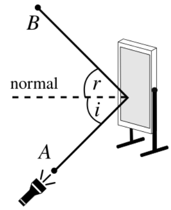
39. **(Área mínima)**. Resolver el problema anterior para el caso en que el envase no tenga tapa superior.

40. **(Volumen máximo)**. Se quiere construir vasos cilíndricos sin tapa, a base de vidrio, compuestos por $108\pi cm^2$. de material ¿Qué dimensiones debe tener el vaso si se quiere que contenga la mayor cantidad de líquido?

41. **(Velocidad más económica)**. Un bus debe hacer un viaje de 500 kilómetros a una velocidad constante de $x\ km/h$. Si la gasolina cuesta \$0.5 por litro, el bus consume $2 + \frac{x^2}{200}$ litros por hora, y el conductor cobra \$15 por hora ¿cuál es la velocidad más económica?

42. **(Ley de reflexión)**. Usando el *principio de Fermat* (la luz viaja de un punto a otro con la trayectoria que minimiza el tiempo) probar que:

si la luz parte de A se refleja en un espejo y pasa por el punto B, entonces el ángulo de incidencia i es igual al ángulo de reflexión r.

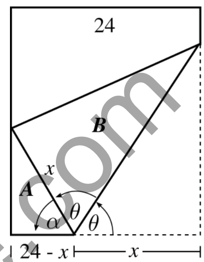


43. (Áreas optimas).

La esquina de una hoja de papel de 24 centímetros de ancho se dobla de una forma en que el vértice doblado toca el lado opuesto, como se indica en la figura. Hallar el valor de x para el cual:

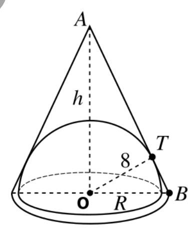
a. el triángulo A tenga área máxima.

b. el triángulo B tenga área mínima.



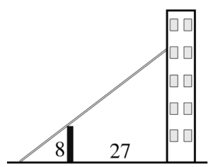
44. (Volumen mínimo).

Hallar las dimensiones de un cono circular recto de volumen mínimo que se puede circunscribir en un hemisferio (semiesfera) de 8 centímetros de radio.



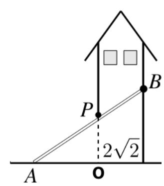
45. (Longitud mínima).

Se tiene una pared de 8 pies de altura a 27 pies de distancia de un edificio.
Hallar la longitud de la escalera más corta que pueda apoyarse en el suelo, la pared y el edificio.



46. (Altura mínima).

Hallar la altura mínima $h = \overline{OP}$ que debe tener una puerta de una torre para que, a través de ella, pueda pasar un tubo $\overline{AB}$ de longitud $6\sqrt{6}$ m. tomando en cuenta que el ancho de la torre es $2\sqrt{2}$ m.



SECCION 4.7

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Resolver ecuaciones no siempre es sencillo o factible debido a las posibles complicaciones que surgen cuando hay *funciones trascendentes* involucradas como, por ejemplo, $\cos x = x$, que tiene una apariencia muy simple, pero no existen formulas predefinidas para resolverla. En ese sentido, el método de **Newton-Raphson** nos ayudará a aproximar las raíces de estas ecuaciones complicadas, mediante un proceso de iteración, y con la exactitud deseada.

Este método fue presentado por **Isaac Newton** en su obra *Method of Fluxions*, escrita el año 1671, y publicada muchos años después(en 1736). Con el objetivo de ilustrar su método, Newton encuentra aproximaciones a la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$ (ver el ejemplo 4.7.2).

Joseph Raphson (1648-1715) fue un matemático inglés egresado de la Universidad de Cambridge y amigo de Newton. Estuvo involucrado a favor de Newton en la reyerta con Leibniz sobre los orígenes del Cálculo. Raphson, a quien Newton le permitía acceso a sus trabajos, publicó su obra **Analisys Aequationum Universales** en el año 1690, mucho antes que apareciera Method of Fluxions. En esta obra aparece, por primera vez, el método que ahora se denomina Newton-Raphson.

Veamos lo que dice este método: sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, el teorema del valor intermedio nos asegura que existe un número real $a < r < b$ tal que $f(r) = 0$. Esto es, r es una raíz de $f(x) = 0$, que esta entre a y b. Haciendo un esbozo rápido de la gráfica de f, elegimos una primera aproximación x_1.

El método de Newton se basa en la hipótesis de que la recta tangente al gráfico, en el punto $(x_1, f(x_1))$, corta al eje X en un punto x_2, cercano a r.

Veamos como hallar x_2. La recta tangente L en $(x_1, f(x_1))$ tiene ecuación:

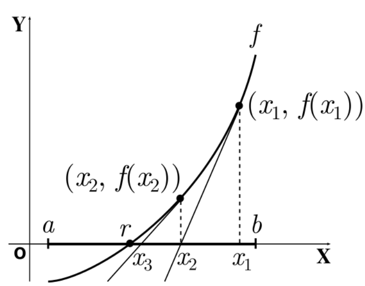
$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

Si esta recta corta al eje X en x_2, tenemos:

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

De donde:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \text{ si } f'(x_1) \neq 0$$



Repetimos el proceso tomando x_2 en lugar de x_1, y logramos la tercera aproximación x_3, dada por:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Continuando el proceso, conseguimos una sucesión de aproximaciones:

$$x_1,\, x_2,\, x_3 \ldots,\, x_n,\, x_{n+1} \ldots, \qquad \text{donde} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

A cada aproximación sucesiva x_n se le llama **iteración**.

Diremos que esta sucesión de aproximaciones converge a r si x_n se acerca más y más, a medida que n crece. Es decir:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = r$$

En resumen, tenemos el siguiente procedimiento.

Método de Newton-Rapson

Si $f(r) = 0$, donde f es derivable en un intervalo abierto que contiene a r, entonces se deben seguir los siguientes pasos para aproximarse a la raíz r:

Paso 1

Tomar una estimación inicial x_1, cercana a r. Apoyarse en el gráfico de f.

Paso 2

A partir de x_1, hallar nuevas estimaciones x_2, $x_3 \ldots$, x_n, x_{n+1}, con el uso de la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{donde } f'(x_n) \neq 0$$

Paso 3

La aproximación buscada es x_{n+1} si se cumple que $x_{n+1} = x_n$, con el grado de aproximación buscada.

Ejemplo 4.7.1

Comenzando con $x_1 = 1$, calcular las aproximaciones x_2, x_3, x_4 y x_5 de la raíz positiva de la ecuación:

$$x^2 - 3 = 0$$

Solución

La raíz positiva de $x^2 - 3 = 0$ es $\sqrt{3}$; así que nos están pidiendo cuatro aproximaciones de $\sqrt{3}$.

Bien, la función f es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, en todo intervalo abierto que contiene a $\sqrt{3}$. Además, $f'(x) = 2x$. Luego:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^2 - 3}{2x_n} = \frac{(x_n)^2 + 3}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$$

Ahora, si $x_1 = 1$, entonces:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{1}\right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{3}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{3}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(1.75 + \frac{3}{1.75}\right) = \frac{6.0625}{3.5} = 1.732142857$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(1.732142857 + \frac{3}{1.732142857}\right) = \frac{6.000318877}{3.464285714} = 1.73205081$$

Una calculadora nos dice que $\sqrt{3} = 1.732050808$. Vemos que este valor, y el de x_5, coinciden en 6 cifras decimales.

Observación

El grado de aproximación se expresa dando el número de cifras decimales deseados para la raíz. Así, si se pide una aproximación de 3 cifras decimales, se calculan las aproximaciones hasta que x_{n+1} y x_n coincidan en, por lo menos, las tres primeras cifras decimales. Otra manera de expresar este requerimiento es pedir que las aproximaciones sucesivas (x_{n+1} y x_n) difieran en menos de $0.001 = 10^{-3}$. Generalmente, decir que una aproximación x_{n+1} es de k cifras decimales, es equivalente a decir que x_{n+1} y x_n difieran en menos de 10^{-k}.

En el siguiente ejemplo aproximaremos la raíz de la ecuación calculada por Newton en su obra *Method of Fluxions.*

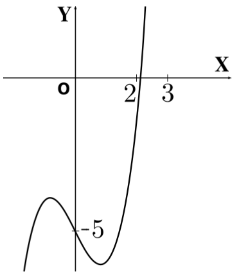
Ejemplo 4.7.2

Mediante el método de Newton-Raphson, hallar una aproximación con 6 cifras decimales a las las raíces de:

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

Solución

Sea $f(x) = x^3 - 2x - 5$. El gráfico de f nos muestra que la ecuación dada tiene una única raíz real que se encuentra en el intervalo [2, 3]. Esta afirmación también la comprobamos viendo que $f(2) = -1$ es negativo y $f(3) = 16$ es positivo. Tenemos que:



$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

Entonces:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^3 - 2x_n - 5}{3{x_n}^2 - 2} = \frac{2{x_n}^3 + 5}{3{x_n}^2 - 2}$$

El gráfico nos sugiere tomar a $x_1 = 2$ como aproximación inicial. Ahora:

$$x_2 = \frac{2{x_1}^3 + 5}{3{x_1}^2 - 2} = \frac{2(2)^3 + 5}{3(2)^2 - 2} = \frac{21}{10} = 2.1$$

$$x_3 = \frac{2{x_2}^3 + 5}{3{x_2}^2 - 2} = \frac{2(2.1)^3 + 5}{3(2.1)^2 - 2} = \frac{23.522}{11.23} = 2.094568121$$

$$x_4 = \frac{23.37864393}{11.16164684} = 2.094551482$$

$$x_5 = \frac{23.37820594}{11.16143773} = 2.094551482$$

Vemos que x_5 y x_4 coinciden en las seis primeras cifras decimales (en realidad, en 9 cifras). Luego, la aproximación buscada es $x_5 = 2.094551482$ o, con 6 cifras decimales:

$$x_5 = 2.094551$$

Ejemplo 4.7.3

Usando el método de Newton-Raphson, determinar, con 8 cifras decimales, la coordenada x del punto en el primer cuadrante donde se intersectan las curvas:

$$y = 2\cos x \quad \textbf{y} \quad y = x^2$$

Solución

Aproximar la coordenada x del punto de intersección de ambas curvas equivale a aproximar la raíz de la ecuación $2\cos x = x^2$ o, lo que es igual, la raíz de la ecuación $2\cos x - x^2 = 0$.

En consecuencia, aplicamos la regla de Newton-Raphson a $f(x) = 0$, donde $f(x) = 2\cos x - x^2$. Tenemos que:

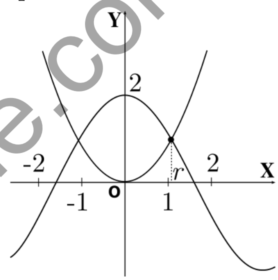
$$f'(x) = -2\operatorname{sen} x - 2x = -2(\operatorname{sen} x + x)$$

Luego:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2\cos x_n - (x_n)^2}{-2(\operatorname{sen} x_n + x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{(x_n)^2 + 2(x_n \operatorname{sen} x_n + \cos x_n)}{2(\operatorname{sen} x_n + x_n)}$$

La gráfica nos sugiere que tomemos a $x_1 = 1$ como aproximación inicial:



$$x_2 = \frac{(1)^2 + 2(1)\operatorname{sen}(1) + \cos(1)}{2(\operatorname{sen}(1) + 1)} = \frac{3.763546581}{3.68294197} = 1.02188593$$

$$x_3 = \frac{3.83129541}{3.749958935} = 1.021689964$$

$$x_4 = \frac{3.830685977}{3.749362477} = 1.021689954 \qquad x_5 = \frac{3.830685945}{3.749362446} = 1.021689954$$

Vemos que x_5 y x_4 coinciden en 8 (en realidad, en 9) cifras decimales. Por lo tanto, la aproximación buscada es $x_5 = 1.021689954$. Redondeando x_5 a 8 cifras decimales: $x_5 = 1.02168995$.

La aplicación web **Mathway** (www.mathway.com) arroja, como solución aproximada, el valor 1.02168995, el cual coincide con x_5.

DIFICULTADES EN LA REGLA DE NEWTON-RAPHSON

Algunas veces la sucesión de aproximaciones x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n$ dadas por el método de Newton-Raphson **no converge**. Esto se puede deber a dos motivos:

1. Existe una aproximación x_k tal que $f'(x_k) = 0$; es decir, cuando la recta tangente es horizontal en el punto $(x_k,\ f(x_k))$. En este caso no podemos calcular x_{k+1}, ya que éste requiere dividir entre $f'(x_k) = 0$.

Puede suceder también que $f'(x_k)$, sin ser 0, esté muy cercana a 0. En este caso, la aproximación x_{k+1} se alejará de la raíz inicial y se pondrá próxima a otra raíz de la ecuación.

Esta primera dificultad se salva fácilmente eligiendo la aproximación inicial con más cuidado.

2. Existen ecuaciones $f(x) = 0$, para las que definitivamente la regla de Newton-Raphson no funciona. Veremos que el problema resuelto 4.7.4 es uno de estos casos. Aquí la situación es insalvable, por lo que la solución se debe buscar por otros métodos distintos a Newton-Raphson.

PROBLEMAS RESUELTOS 4.7

Problema 4.7.1

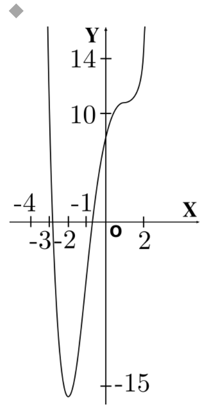
Hallar, mediante el método de Newton-Raphson, una aproximación con 5 cifras decimales a las raíces de:

$$x^4 - 6x^2 + 8x + 8 = 0$$

Solución

Sea $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 8$. Se tiene:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x+2)(x-1)^2$$
$$\Rightarrow f'(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(1) = 0$$



El gráfico de f nos dice que la ecuación dada tiene dos raíces, una es r_1 en el intervalo $[-3, -2]$, y la otra es r_2 en el intervalo $[-1, 0]$.

En vista de que $f'(-2) = 0$, no será posible tomar $x_1 = -2$ como aproximación inicial para ninguna de las dos raíces. Pero, nuevamente, el gráfico nos dice que se debe escoger $x_1 < -2$ para aproximar r_1, y se debe escoger $x_1 > -2$ para aproximar r_2.

El gráfico nos sugiere que tomemos $x_1 = -3$ para r_1, y $x_1 = -1$ para r_2:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^4 - 6{x_n}^2 + 8x_n + 8}{4\left({x_n}^3 - 3x_n + 2\right)} = \frac{3{x_n}^4 - 6{x_n}^2 - 8}{4\left({x_n}^3 - 3x_n + 2\right)}$$

1. Aproximación de r_1:

$x_1 = -3$

$$x_2 = \frac{3(-3)^4 - 6(-3)^2 - 8}{4\left((-3)^3 - 3(-3) + 2\right)} = \frac{181}{4(-16)} = -2.8228125$$

$x_3 = -2.800151689 \qquad x_4 = -2.799446153 \qquad x_5 = -2.79944571$

Luego, $r_1 = x_5 = -2.79944571$ o, con cinco cifras decimales:

$$r_1 = -2.79945$$

2. Aproximación de r_2:

$x_1 = -1$

$$x_2 = \frac{3(-1)^4 - 6(-1)^2 - 8}{4\left((-1)^3 - 3(-1) + 2\right)} = -\frac{11}{4(4)} = -0.6875$$

$x_3 = -0.679972769 \qquad x_4 = -0.67996066 \qquad x_5 = -0.67996066$

Luego, $r_2 = -0.67996066$ o, con cinco cifras decimales:

$$r_2 = -0.67996$$

Problema 4.7.2 Dada la función $y = \mathrm{e}^x$, hallar:

a. el punto P_0, en la gráfica de la función, que está más cercano al origen.

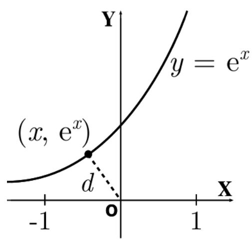
b. la distancia desde este punto hasta el origen.

Dar las respuestas con tres decimales de aproximación.

Solución

a. La distancia de un punto $P = (x, \mathrm{e}^x)$ cualquiera, del gráfico de $y = \mathrm{e}^x$ al origen, está dada por la función:

$$d = \sqrt{x^2 + (\mathrm{e}^x)^2} = \sqrt{x^2 + \mathrm{e}^{2x}}$$



El punto que buscamos es el punto cuyas coordenadas minimizan esta distancia d; es decir que debemos hallar los números críticos de:

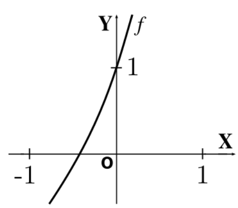
$$d = \sqrt{x^2 + \mathrm{e}^{2x}}$$

Tenemos que:

$$d' = \frac{x + \mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{x^2 + \mathrm{e}^{2x}}}, \text{ entonces: } d' = 0 \Leftrightarrow x + \mathrm{e}^{2x} = 0$$

Luego, los números críticos de d son las raíces de la ecuación:

$$x + \mathrm{e}^{2x} = 0$$



Sea $f(x) = x + \mathrm{e}^{2x}$. La gráfica de f nos dice $f(x)$ tiene sólo una raíz, que está en el intervalo $[-1, 0]$.

Aproximemos esta raíz.

$f'(x) = 1 + 2\mathrm{e}^{2x}$, entonces:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + \mathrm{e}^{2x_n}}{1 + 2\mathrm{e}^{2x_n}} = \frac{(2x_n - 1)\mathrm{e}^{2x_n}}{1 + 2\mathrm{e}^{2x_n}} = \frac{2x_n - 1}{\mathrm{e}^{-2x_n} + 2}$$

Sea $x_1 = -0.5$. Entonces:

$$x_2 = \frac{2x_1 - 1}{\mathrm{e}^{-2x_1} + 2} = \frac{2(-0.5) - 1}{\mathrm{e}^{-2(-0.5)} + 2} = \frac{-2}{4.718281828} = -0.423883115$$

$$x_3 = \frac{-1.84776623}{4.334426452} = -0.426300053$$

$$x_4 = \frac{-1.852600108}{4.345738097} = -0.426302751$$

Luego, la aproximación, con tres cifras decimales, es $x = -0.426$

El punto del gráfico de $y = \mathrm{e}^x$ más cercano al origen es:

$$P_0 = \left(-0.426,\ \mathrm{e}^{-0.426}\right) = (-0.426,\ 0.653)$$

b. La distancia de $P_0 = (-0.426,\ 0.653)$ al origen, es:

$$d = \sqrt{x^2 + \mathrm{e}^{2x}} = \sqrt{(-0.426)^2 + \mathrm{e}^{2(-0.426)}} = \sqrt{0.60803695} = 0.780$$

Problema 4.7.3 Sea a un número positivo y k un entero mayor que 1.

a. Deducir que el método de Newton-Raphson, para aproximar $\sqrt[k]{a}$, nos da la siguiente iteración:

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{a}{{x_n}^{k-1}}\right]$$

b. Usando esta iteración, hallar $\sqrt[5]{17}$ con una precisión de 6 cifras decimales.

La iteración anterior, para $k = 2$, es:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Esta fórmula fue empleada en la antigua Babilonia para computar la raíz cuadrada $\sqrt{a}$.

Solución

a. $\sqrt[k]{a}$ es la raíz de la ecuación $f(x) = x^k - a$. De acuerdo a Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^k - a}{k{x_n}^{k-1}} = \frac{k{x_n}^k - \left({x_n}^k - a\right)}{k{x_n}^{k-1}}$$

$$= \frac{(k-1){x_n}^k + a}{k{x_n}^{k-1}} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{a}{{x_n}^{k-1}}\right]$$

b. Tomamos como aproximación inicial $x_1 = 1.5$

$$x_2 = \frac{1}{5}\left(4x_1 + \frac{17}{{x_1}^4}\right) = \frac{1}{5}\left(4(1.5) + \frac{17}{(1.5)^4}\right) = 1.871604938$$

$$x_3 = 1.774374802 \qquad x_4 = 1.762502488$$

$$x_5 = 1.762340377 \qquad x_6 = 1.762340348$$

Luego, $\sqrt[5]{17} = 1.762340$ con 6 cifras decimales.

Problema 4.7.4

Mostrar que el método de Newton-Raphson no funciona para aproximar la raíz de la ecuación $\sqrt[3]{x} = 0$

Solución

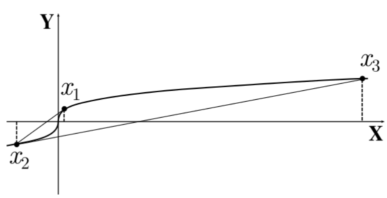
La raíz de esta ecuación es $r = 0$. Este valor no puede ser aproximado por ninguna sucesión x_1, x_2, x_3, $\ldots x_n, \ldots$ de aproximaciones obtenidas por el método de Newton-Raphson, donde x_1 es cualquier valor no nulo. En efecto:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \ \text{ y } \ f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

Entonces:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}(x_n)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= x_n - 3x_n = -2x_n$$



Luego, la sucesión de aproximaciones es:

$$x_1, -2x_1, 4x_1, -8x_1, \cdots$$

Estas aproximaciones se alejan de 0 a medida que n crece, para cualquier $x_1 \neq 0$. En otras palabras, la sucesión *no converge.*

¿Sabías esto?

LOS NÚMEROS MÁS PEQUEÑOS QUE PUEDAS IMAGINAR

*Los **infinitesimales** son números más pequeños que cualquier positivo, pero distintos de cero. Este concepto ha cautivado a matemáticos y filósofos durante siglos, pero también ha sido objeto de debate y escepticismo por parte un sector de la comunidad científica.*

Los antiguos griegos intuyeron su existencia al tratar de calcular áreas y volúmenes de figuras curvas; sin embargo, fue en el siglo XVII cuando este concepto cobró una importancia central con el desarrollo del cálculo, ya que Newton y Leibniz los utilizaron como herramienta para resolver problemas de movimiento, cambio y geometría. En efecto, las diferenciales estudiadas en el capitulo 3 son variaciones infinitesimales, ya que Leibniz formuló la derivada como una razón de diferencias infinitesimales ($\frac{dy}{dx}$).

A pesar de su utilidad, los infinitesimales carecían de rigor, y como ya vimos en el primer capitulo, esto representa una debilidad muy grave en el ámbito matemático. Esta falencia condujo a su reemplazo por límites y otras herramientas más rigurosas durante el período de formalización del calculo del siglo XIX. No obstante, con el desarrollo de la lógica matemática y la teoría de conjuntos, se logró su formalización rigurosa en el siglo XX.

Los infinitesimales tienen muchas aplicaciones. Por ejemplo, en física se usan para modelar fenómenos continuos, como el movimiento de partículas, el flujo de fluidos y la propagación de ondas. En economía sirven para analizar problemas de optimización y el comportamiento de mercados financieros. En ingeniería son esenciales en diseño de estructuras y sistemas complejos.

Pese a su naturaleza contraintuitiva, su estudio ha enriquecido nuestra comprensión de los números, el cambio y el universo. Por ello siguen siendo objeto de investigación e inspiración para matemáticos y científicos.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.7

En los problemas del 1 al 6, esbozando la función correspondiente, deducir que las ecuaciones dadas tienen una única raíz. Mediante el método de Newton-Raphson, hallar una aproximación a esta raíz con seis cifras decimales.

1. $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ **2.** $x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 0$ **3.** $\cos x = x$

4. $\cos(x^3) = x$ **5.** $e^{-x} = x$ **6.** $x \ln x = 1$

En los problemas del 7 al 11, muestre que $f(x) = 0$ tiene una raíz en el intervalo $[a, b]$ verificando que $f(a)$ y $f(b)$ tienen diferentes signos. Luego, mediante el método de Newton-Raphson, hallar una aproximación a esa raíz, con seis cifras decimales.

7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x - x + 1,$
$a = 1,\ b = 2$

8. $f(x) = \operatorname{sen} x - e^{-x},\ a = 2,\ b = 4$

9. $f(x) = \tan x + x,\ a = 2,\ b = 3$

10. $f(x) = \tan^{-1} x - \frac{x}{2},$
$a = -3,\ b = -2$

11. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x - (x-1)^2, \quad a = 0,\ b = 1$

En los problemas del 12 y 13, hallar el valor del radical dado con 6 cifras de aproximación.

12. $\sqrt[3]{19}$ **13.** $\sqrt[6]{2}$

En los problemas 14 y 15, usando el método de Newton-Raphson, determinar, con 6 cifras decimales, la coordenada x del punto donde se intersectan las curvas dadas.

14. $y = \ln x,\ y = 4x - x^2$ **15.** $y = \tan^{-1} x,\ y = 2 - x$

16. Dada la parábola $y = x^2$, hallar:

- **a.** el punto P_0 en la gráfica, el cual está más cerca del punto $(2, 0)$.
- **b.** la distancia de este punto al punto $(2, 0)$.

Dar las respuestas con tres decimales de aproximación.

17. Hallar el máximo absoluto de la función $g(x) = \cos x + 5x - x^2$. Dar la respuesta con 3 cifras decimales de aproximación.

18. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-a}, & \text{si } x \geq a \\ -\sqrt{a-x}, & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

Si una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ es a, probar que el método de Newton-Raphson falla en aproximar la raíz a.

Para esto debe probar que, para cualquier número positivo h, si $x_1 = a + h$, entonces $x_2 = a - h$; y si $x_1 = a - h$, entonces $x_2 = a + h$.

Ha sido un gran viaje, pero aun queda camino por recorrer

Como puedes ver, el Cálculo Diferencial es una eficaz herramienta que nos permite modelar fenómenos complejos en diversas disciplinas. Su importancia crece en la misma medida que lo hace la digitalización y la automatización, ya que sus aplicaciones en campos emergentes como la inteligencia artificial, la biotecnología y la exploración espacial son vastas y prometedoras.

Sin embargo, el viaje del cálculo no termina aquí. El siguiente destino es el **Cálculo Integral**, una rama del cálculo que se centra en la acumulación de cantidades y la determinación de áreas bajo curvas. Mientras que el Cálculo Diferencial se ocupa de tasas de cambio y pendientes de curvas, el Cálculo Integral nos permite abordar problemas relacionados con sumas de infinitos elementos pequeños para encontrar áreas, volúmenes y otras cantidades.

El Cálculo Integral es fundamental para entender conceptos avanzados en física, ingeniería y economía, entre otros campos. Además, el Cálculo Integral y el Cálculo Diferencial están intrínsecamente vinculados por el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que establece una conexión profunda entre la derivación y la integración.

El Cálculo Diferencial nos prepara para enfrentar los desafíos actuales y también nos concede habilidades para innovar en un mundo de constante evolución. Al avanzar hacia el Cálculo Integral, continuaremos expandiendo nuestro conocimiento y nuestras capacidades, abriendo nuevas puertas a la comprensión y la aplicación de las matemáticas en el mundo real.

"El entusiasmo es la chispa que enciende el fuego del progreso"

Gottfried Leibniz

5

TABLAS

ALGEBRA

EXPONENTES Y RADICALES

1. $a^0 = 1,\ a \neq 0$ **2.** $(ab)^x = a^x b^x$ **3.** $a^x a^y = a^{x+y}$

4. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ **5.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **6.** $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

7. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ **8.** $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ **9.** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

11. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ **12.** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

TEOREMA DEL BINOMIO

13. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **14.** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

15. $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + na^{n-1}b + b^n$

16. $(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots - na^{n-1}b + (-1)^n b^n$, donde $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$

PROGRESION GEOMETRICA

17. $a_1 = a,\ a_2 = ar,\ a_3 = ar^2,\ a_4 = ar^3, \ldots,\ a_n = ar^{n-1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

FACTORIZACION

18. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ **19.** $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

20. $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ **21.** $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

22. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ **23.** $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

24. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$ **25.** $|\,x\,| = a \Leftrightarrow x = a$ o $x = -a$

26. $|\,x\,| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ **27.** $|\,x\,| > a \Leftrightarrow -a < x$ o $x > a$

GEOMETRIA

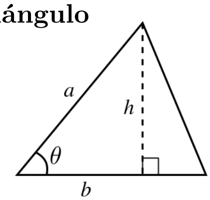
h = altura, A = Area, AL = Area Lateral, V = Volumen

Triángulo

$h = a \operatorname{sen}\theta$

$A = \dfrac{1}{2}bh$

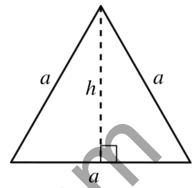
$A = \dfrac{1}{2}b \operatorname{sen}\theta$



Triángulo Equilátero

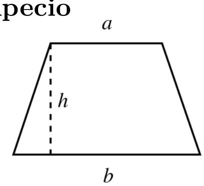
$h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$



Trapecio

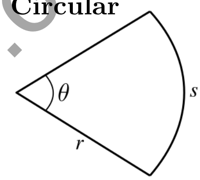
$A = \dfrac{h}{2}(a+b)$



Sector Circular

$s = r\theta$

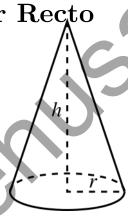
$A = \dfrac{1}{2}r^2\theta$



Cono Circular Recto

$AL = \pi r\sqrt{r^2+b^2}$

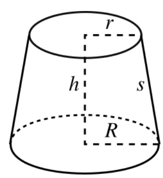
$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$



Tronco de Cono

$V = \dfrac{\pi h}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right)$

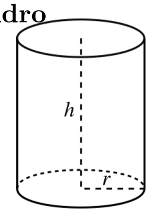
$AL = \pi s(r+R)$



Cilindro

$V = \pi r^2 h$

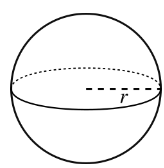
$AL = 2\pi r h$



Esfera

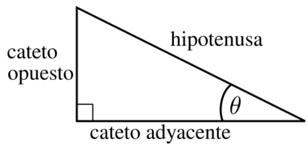
$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$A = 4\pi r^2$



TRIGONOMETRIA

RAZONES TRIGONOMETRICAS



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

1. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ **2.** $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ **3.** $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

4. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ **5.** $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ **6.** $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

7. $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$ **8.** $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ **9.** $\cos(-x) = \cos x$

10. $\tan(-x) = -\tan x$

IDENTIDADES DE COFUNCION Y DE REDUCCION

11. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ **12.** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

13. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ **14.** $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

15. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cosec} x$ **16.** $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$

17. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ **18.** $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$

19. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$ **20.** $\cos(x + \pi) = -\cos x$

21. $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$ **22.** $\tan(x + \pi) = \tan x$

IDENTIDADES DE SUMA Y DIFERENCIA

23. $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

24. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

25. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$ **26.** $\cot(x \pm y) = \dfrac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$

IDENTIDADES DE ANGULOS DOBLES Y TRIPLES

27. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

28. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

29. $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$ **30.** $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

31. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

IDENTIDADES DE REDUCCION DE POTENCIAS

32. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ **33.** $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ **34.** $\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

IDENTIDADES DEL ANGULO MITAD

35. $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ **36.** $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

TRANSFORMACION DE PRODUCTOS EN SUMAS

37. $\operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$

38. $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

39. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

TRANSFORMACION DE SUMAS EN PRODUCTOS

40. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

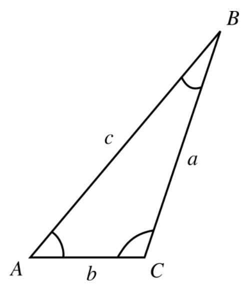
41. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$

42. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

43. $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$

LEY DE LOS SENOS

44. $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$



LEY DE LOS COSENOS

45. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

46. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

47. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS NOTABLES

Grad	Rad	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	cosec θ
0°	$\mathbf{0}$	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
180°	π	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\pm\infty$
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
360°	2π	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

1. $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ **2.** $\log_a \mathrm{e} = \dfrac{1}{\ln a}$ **3.** $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$

IDENTIDADES HIPERBOLICAS

1. $\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$

2. $\cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$

3. $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

4. $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$

5 $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

6. $\operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

7. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

8. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

9. $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$

10. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

11. $\cosh(-x) = \cosh x$

12. $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

13. $\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

14. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

15. $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

16. $\operatorname{senh}^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$

17. $\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$

18. $\operatorname{senh} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}}$

19. $\cosh \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{\cosh x + 1}{2}}$

ALFABETO GRIEGO

A	α	alfa	I	ι	iota	P	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mu	Y	υ	ipsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nu	Φ	ϕ	fi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	ji
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

FORMULAS DE DERIVACION

PRODUCTO Y COCIENTE

1. $D_x\left[f(x)g(x)\right] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$

2. $D_x\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

FUNCIONES EXPONENCIALES

3. $D_x\left(u^n\right) = nu^{n-1}D_x u$ o bien $D_x\left[(g(x))^n\right] = n\left(g(x)\right)^{n-1}D_x g(x)$

4. $D_x \mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u D_x u$

5. $D_x a^u = a^u \ln a D_x u$

FUNCIONES LOGARITMICAS

6. $D_x \ln u = \dfrac{1}{u}D_x u$

7. $D_x \log_a u = \dfrac{1}{u\ln a}D_x u$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

8. $D_x \operatorname{sen} u = \cos u D_x u$

9. $D_x \cos u = -\operatorname{sen} u D_x u$

10. $D_x \tan u = \sec^2 u D_x u$

11. $D_x \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u D_x u$

12. $D_x \sec u = \sec u \tan u D_x u$

13. $D_x \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u D_x u$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

14. $D_x \operatorname{sen}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}D_x u$

15. $D_x \cos^{-1} u = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}D_x u$

16. $D_x \tan^{-1} u = \dfrac{1}{1+u^2}D_x u$

17. $D_x \cot^{-1} u = -\dfrac{1}{1+u^2}D_x u$

18. $D_x \sec^{-1} u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}D_x u$

19. $D_x \operatorname{cosec}^{-1} u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}D_x u$

FUNCIONES HIPERBOLICAS

20. $D_x \operatorname{senh} u = \cosh u D_x u$

21. $D_x \cosh u = \operatorname{senh} u D_x u$

22. $D_x \tanh u = \operatorname{sech}^2 u D_x u$

23. $D_x \coth u = -\operatorname{cosech}^2 u D_x u$

24. $D_x \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u D_x u$

25. $D_x \operatorname{cosech} u = -\operatorname{cosech} u \coth u D_x u$

FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

26. $D_x \sec^{-1} u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$

27. $D_x \text{cosech}^{-1} u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$

28. $D_x \operatorname{senh}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} D_x u$

29. $D_x \cosh^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u$

30. $D_x \tanh^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^2} D_x u$

31. $D_x \coth^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^2} D_x u$

32. $D_x \text{sech}^{-1} u = -\dfrac{1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u$

33. $D_x \text{cosech}^{-1} u = -\dfrac{1}{\mid u \mid \sqrt{1+u^2}} D_x u$

6

RESPUESTAS

CAPITULO 1

SECCION 1.1

1. 10 **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** 0 **4.** $\frac{2}{3}$ **5.** 6 **6.** -10
7. $\frac{1}{4}$ **8.** 12 **9.** 27 **10.** 12 **11.** $-\frac{7}{2}$ **12.** -1
13. 18 **14.** 32 **15.** 8 **16.** $\frac{1}{3}$ **17.** 108 **18.** $2\sqrt{2}$
19. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ **20.** $\frac{1}{4}$ **21.** $\frac{1}{4}$ **22.** 0 **23.** $-\frac{1}{56}$ **24.** 3
25. $\frac{3}{2}$ **26.** 12 **27.** $\frac{1}{3}$ **28.** $\frac{2}{3}$ **29.** $\frac{3}{2}$ **30.** 3
31. $\frac{4}{3}$ **32.** $\frac{m}{n}$ **33.** $\frac{1}{2}$ **34.** $\frac{3a^2}{a-1}$ **35.** $\frac{(a-b)\sqrt{c+d}}{(c-d)\sqrt{a+b}}$
38. 0 **39.** 0 **40.** 1 **41.** 2 **42.** -3 **43.** -2
44. 0 **45.** 1 **46.** 0 **47.** 12 **48.** 13 **49.** 3
50. 3 **51.** 1 **52.** 0 **53.** $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ **54.** $\frac{9}{2}\sqrt[6]{a^7}$
55. a. 5 **b.** 5 **c.** 5 **56. a.** 8 **b.** 8 **c.** 8 **57. a.** -4 **b.** no existe

58. $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

59. a. $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $g(x) = -\frac{x}{|x|}$ en $a = 0$ **b.** las mismas de **(a)**

SECCION 1.3

1. -1 **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** 0 **5.** 0 **6.** 0
7. 1 **8.** $\frac{1}{2}$ **9.** $\frac{1}{2}$ **10.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **11.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **12.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$
13. π **14.** $\frac{3}{4}$ **15.** $\frac{1}{2}$ **16.** 0 **17.** 1 **18.** $\frac{2\cos a}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}$
19. $-2\operatorname{sen} a$ **20.** $\cos^3 a$ **21.** $-\frac{1}{3}$ **22.** 3

SECCION 1.4

2. $\frac{1}{2}$ **4.** 0, esencial **5.** -2, esencial **6.** 2 y -2, esenciales
7. 5, esencial **8.** 3 y -8, esenciales **9.** 2, esencial
10. 3, esencial **11.** 1, esencial **12.** 3 y 5 **13.** 4
14. 2 **15.** -1, 2 **16.** $a = 1$ y $b = -1$ **17.** $a = \frac{9}{\pi}$ y $b = -\frac{11}{4}$
18. $a = -1$ y $b = 1$ **19.** $a = b$, b cualquiera **20.** $\left\{n + \frac{1}{2},\ n \text{ un entero}\right\}$
21. $\{4n,\ n \text{ un entero}\}$ **22.** $[0,\,1) \cup \mathbb{Z}$ **23.** $\{0\}$ **24.** $\mathbb{Z}$ **25.** $\mathbb{R}$
26. 1.5 **27.** -1.9 **28.** 0.7

SECCION 1.5

1. en 2: $+\infty$, $-\infty$ **2.** en 2: $+\infty$, $+\infty$ **3.** en -1: $+\infty$, $+\infty$
4. en 4:$+\infty$, $-\infty$ **5.** en 5: $+\infty$, $-\infty$ **6.** en 0: $+\infty$, $-\infty$;
en -2: $-\infty$, $+\infty$

7. en 3: $+\infty, -\infty$; en -1: $+\infty, -\infty$ **8.** en -2: $-\infty, +\infty$; en 2: $+\infty, -\infty$
9. en 0: $-\infty, +\infty$ **10.** 0 **11.** $+\infty$ **12.** $+\infty$ **13.** $-\infty$
14. $-\infty$ **15.** $+\infty$ **16.** $-\infty$ **17.** $+\infty$ **18.** $-\infty$ **19.** $-\infty$
20. $+\infty$ **21.** 1 **22.** $-\frac{1}{2}$ **23.** $-\infty$ **24.** 0 **25.** 2
26. 0 **27.** $-\infty$ **28.** $+\infty$ **29.** $x=0$ **30.** $x=\frac{1}{2},\ x=-\frac{1}{2}$
31. $x=1,\ x=-1$ **32.** $x=1,\ x=-1$

SECCION 1.6

1. 0, 0 **2.** 0, 0 **3.** 1, 1 **4.** $+\infty, -\infty$ **5.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
6. $+\infty, -\infty$ **7.** $-\infty, +\infty$ **8.** 1, 1 **9.** $+\infty, +\infty$ **10.** $+\infty$
11. $+\infty$ **12.** 1 **13.** 0 **14.** $+\infty$ **15.** -2
16. 0 **17.** $+\infty$ **18.** $\frac{5}{2}$ **19.** 0 **20.** 2
21. -2 **22.** $\frac{1}{2}$ **23.** 0 **24.** $\frac{1}{2}$ **25.** 0
26. 1 **27.** -1 **28.** 1 **29.** 0 **30.** 0
31. 0 **35.** $y=0$ **36.** $y=0$ **37.** $y=0$ **38.** $y=2,\ y=-2$
39. $y=1,\ y=-1$ **40.** no tiene **41.** $y=0$ **42.** $x=-4,\ x=4,\ y=-2$
43. $x=1,\ y=2,\ y=-2$ **44.** $x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2},\ y=1,\ y=-1$

SECCION 1.7

1. a **2.** $\frac{1}{a}$ **3.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$ **4.** e **5.** $a-b$ **6.** 1

SECCION 1.8

1. $y=x+1$ **2.** $y=x$ **3.** $y=\frac{x}{2}-1$ **4.** $y=2x+2$
5. $y=x,\ y=-x$ **6.** $y=x,\ y=-x$ **7.** $y=2x-2,\ y=-2$ (horizontal)
8. $y=-x+2$

CAPITULO 2

SECCION 2.1

1. $f'(1)=0$ **2.** $g'(3)=1$ **3.** $h'(2)=3$ **4.** $f'(2)=4$
5. $g'(-1)=-4$ **6.** $h'(-2)=-\frac{3}{4}$ **7.** $f'(-1)=-6$ **8.** $g'(2)=\frac{3}{4}$
9. $h'(-1)=3$ **12.** $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3}$ **13.** $f'(x)=0$ **14.** $g'(x)=1$
15. $h'(x)=3$ **16.** $f'(x)=4$ **17.** $g'(x)=4x$ **18.** $h'(x)=-\frac{3}{x^2}$
19. $f'(x)=6x$ **20.** $g'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ **21.** $h'(x)=3x^2$
22. a. $f'(1)=5$ **b.** $5x-y-3=0$ **c.** $x+5y-11=0$
23. a. $g'(12)=\frac{1}{6}$ **b.** $x-6y+6=0$ **c.** $6x+y-75=0$
25. a. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ **b.** $2x-4y+5=0$

SECCION 2.2

1. $y' = 8x - 6$ **2.** $y' = -\frac{1}{3} + x^5$ **3.** $y' = 2x^3 - 0.6x + 2.5$

4. $u' = 10v^9 - 6v^7 + 1.2v^2$ **5.** $s' = -10t^{-6} + t^2 + 0.6t^{-3}$

6. $z' = -\frac{1}{3y^2} + \frac{6}{y^3}$ **7.** $f'(x) = \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{6}} + \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

8. $g'(x) = 5ax^4 + 4bx^{-5} + \frac{3}{2}cx^{\frac{1}{2}}$ **9.** $y' = -\frac{4x^5}{a}$

10. $z' = \frac{3x^2}{a+b} + \frac{5x^4}{a-b} - 1$ **11.** $z' = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}bt$

12. $y' = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^3}$ **13.** $z' = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} + \frac{1}{3t\sqrt[3]{t}}$

14. $u' = -\frac{\sqrt{3}}{4x\sqrt{x}} + \frac{10}{9x\sqrt[3]{x^2}}$ **15.** $y' = -64x^7 - 14x^6 + 90x^5$

16. $y' = \left(x^3 + 3x^2\right)e^x$ **17.** $y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^x$

18. $y' = ex^{e-1} + e^x$ **19.** $y' = 3x^2 - 12x + 11$

20. $72x^5 - 50x^4 - 32x^3 + 2x^2 + 10x + 4$ **21.** $z' = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(21t^{10} - 13t^6 - 18t^4 + 2\right)$

22. $y' = 1$ **23.** $u' = 5x\sqrt{x} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}} - 2$

24. $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2}$ **25.** $y' = -\frac{3}{(x-9)^2}$

26. $y' = -\frac{8}{(x-8)^2}$ **27.** $y' = -\frac{6}{(x-3)^2}$ **28.** $z' = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$

29. $u' = \frac{4t^3-6t^2-1}{(t-1)^2}$ **30.** $y' = \frac{x^4+2x^3+5x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$ **31.** $y' = \frac{ax^2-c}{x^2}$

32. $y' = \frac{3ax^2+bx-c}{2x\sqrt{x}}$ **33.** $y' = \frac{2ax}{\sqrt{a^2+b^2}}$

34. $y' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2} - 3x^2 + 2x + 1$ **35.** $y' = -\frac{2(x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2}$

36. $y' = \frac{-3}{2\sqrt{x}\left(1+2\sqrt{x}\right)^2}$ **37.** $y' = \frac{-4}{3\sqrt[3]{x^2}\left(1+3\sqrt[3]{x}\right)^2}$ **38.** $y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

39. $x + y + 2 = 0$ **40.** $8x + y - 4 = 0$ **41.** $x - 2y + 2 = 0$

42. $-4ax + y + 3a^2 = 0$ **43.** $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ **44.** $y = e$

45. $y = \frac{e}{2}$ **46.** $\left(2, -\frac{65}{6}\right), (-3, 10)$ **47.** $3x + y + 4 = 0$

48. $-x + 2y - 5 = 0$ **49.** $y = 3x^2 - 12x$ **50.** $y = -x^2 + 8x$

51. $y = x^2 + 2x - 3$

SECCION 2.3

1. $f'(x) = 5\cos x - 2\operatorname{sen} x$ **2.** $g'(\theta) = \cot\theta - \theta\operatorname{cosec}^2\theta$

3. $y' = \operatorname{sen}\alpha\left(1 + \sec^2\alpha\right)$ **4.** $y' = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$

5. $h'(t) = \frac{1}{1+\cos t}$ **6.** $f'(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x\cos x}{x^2\cos^2 x}$

7. $g'(x) = \frac{2\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$ **8.** $y' = -\frac{2}{(\operatorname{sen} t\cos t)^2}$

9. $y' = \operatorname{sen} x + \cos x$ **10. a.** $y - 3\sqrt{3}x + \sqrt{3}\pi - 1 = 0$

b. $y + \frac{\sqrt{3}}{9}x - \frac{\sqrt{3}}{27}\pi - 1 = 0$

SECCION 2.4

1. $y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^x$ **2.** $y' = -2^{-x}\ln 2$

3. $y' = \left((\ln 2)x^2 + 2x\right)2^x$ **4.** $y' = \left(-x^2 + 2x\right)e^{-x}$

5. $y' = \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) \mathrm{e}^x$

6. $y' = \left(\frac{1}{x \ln 2} + \ln 2 \log_2 x\right) 2^x$

7. $y' = \frac{1 - x\ln x}{x\mathrm{e}^x}$

8. $y' = \frac{1-(\ln 2)^2 x \log_2 x}{(\ln 2) x 2^x}$

9. $y' = \frac{2}{x(1-\ln x)^2}$

10. $y = \frac{\mathrm{e}}{2}$

11. $y - 2\mathrm{e}x - \mathrm{e} = 0$

12. $(2\ln 2)y + x - 4 = 0$

SECCION 2.5

1. $\frac{dy}{dx} = 3\left(x^2 - 3x + 5\right)^2 (2x - 3)$

2. $f'(x) = -32(15 - 8x)^3$

3. $g'(t) = -18t^2 \left(2t^3 - 1\right)^{-4}$

4. $\frac{dz}{dx} = -8\left(5x^5 - x^4\right)^{-9} \left(25x^4 - 4x^3\right)$

5. $\frac{dy}{dx} = -32x\left(3x^2 - 8\right)^3 \left(-4x^2 + 1\right)^3 + 18x\left(3x^2 - 8\right)^2 \left(-4x^2 + 1\right)^4$

6. $f'(u) = \frac{2u\left(u^3 - 3u - 1\right)}{(u^2-1)^2}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{8(x-1)}{(x+3)^3}$

8. $g'(t) = \frac{-12t\left(3t^2+2\right)\left(t^3+2t+1\right)}{(2t^3-1)^3}$

9. $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

10. $u' = \frac{1-4t-24t^2}{2\sqrt{1+t-2t^2-8t^3}}$

11. $h'(x) = \frac{2x^5}{\sqrt{x^4-1}} + 2x\sqrt{x^4 - 1}$

12. $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

13. $y' = \frac{2\sqrt{3x^2-1}}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + \frac{3x\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{3x^2-1}}$

14. $z' = -\frac{\left(1-3x^2\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^3} - \frac{12x\left(1-3x^2\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$

15. $h'(t) = \frac{3-t}{2(1-t)^{\frac{3}{2}}}$

16. $z' = -\frac{2t}{3(1+t^2)^{\frac{4}{3}}}$

17. $z' = \frac{ax^2}{\sqrt[3]{(b+ax^3)^2}}$

18. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(b^2+x^2)^3}}$

19. $y' = \frac{-1}{\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2}$

20. $f'(x) = \frac{3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$

21. $y' = \frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{2}{3}}}$

22. $y' = \frac{1+2\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

23. $y' = 4\sec^2 4x$

24. $y' = -\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}$

25. $u' = -3x^2 \operatorname{sen}\left(x^3\right)$

26. $y' = -3\operatorname{sen} x \cos^2 x$

27. $y' = 4x^3 \sec^2\left(x^4\right) + 4\tan^3 x \sec^2 x$

28. $z' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}\sqrt{x}$

29. $u' = -\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$

30. $y' = -\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\cos\sqrt{x}}}$

31. $y' = \frac{\sec^2 3x}{(\tan 3x)^{\frac{2}{3}}}$

32. $y' = -\frac{2x \operatorname{cosec}^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)}{3(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}$

33. $y' = -\frac{2\tan x}{\sqrt{\sec x}}$

34. $y' = \frac{2}{x^3} \operatorname{cosec}\frac{1}{x^2} \cot\frac{1}{x^2}$

35. $y' = \frac{-3}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \operatorname{sen}^2\left[\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right] \cos\left[\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right]$

36. $y' = \frac{2\sec^2 x}{(\sec^2 x+1)^{\frac{3}{2}}}$

37. $y' = \frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$

38. $y' = \frac{\left(1-x^2\right)\operatorname{cosec}^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{2x^2\sqrt{1+\cot\left(x+\frac{1}{x}\right)}}$

39. $y' = -\frac{\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}}{2\left(1-\cot^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

40. $y' = \frac{(a-b)\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x}}$

41. $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x)$

42. $y' = -2x\operatorname{sen} x^2 \cos\left(\cos x^2\right)$

43. $y' = -4\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen}(2\cos 4x)$

44. $y' = \cos x \cos(\operatorname{sen} x)\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

45. $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2\cos x) + \cos x \operatorname{sen}(2\operatorname{sen} x)$

46. $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \sec^2\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)\cos\left(\tan\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)\right)$

47. $y' = \operatorname{sen} 2x \sec^2\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$

48. $y' = -6x\mathrm{e}^{-3x^2+1}$

49. $y' = \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}} 2^{\sqrt{x}}$

50. $y' = x^{n-1}a^{-x^2}\left(n - 2x^2 \ln a\right)$ **51.** $y' = \frac{\ln 3}{t^2} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{t}\right) 3^{\cot\left(\frac{1}{t}\right)}$

52. $y' = (\ln 2)(\ln 3) \operatorname{sen}(2x) 3^{\operatorname{sen}^2 x} 2^{3^{\operatorname{sen}^2 x}}$ **53.** $y' = \frac{1}{2(\ln 5)x\sqrt{\log_5 x}}$

54. $y' = \frac{1}{x} - 1$ **55.** $y' = \frac{1-2t\ln t}{te^{2t}}$ **56.** $y' = \frac{8e^{4x}}{e^{8x}-1}$

57. $y' = e^{x\ln x}(1+\ln x)$ **58.** $y' = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}$ **59.** $y' = -\frac{6}{5(x^2-1)}$

60. $y' = \frac{3}{x} + \cot x$ **61.** $y' = -\frac{1}{x^2} \tan \frac{x-1}{x}$ **62.** $G'(2) = 20$

63. $F'(0) = -30$ **64.** $(f \circ g)'(x) = -\frac{3\left(3x^2+10x+3\right)}{2(x+1)^4}$

65. $h'(x) = \left[3u^2 - 4u\right](2) = 6(2x-1)^2 - 8(2x-1) = 24x^2 - 40x + 14$

66. $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{v}}\left(6x^2\right) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-4}}$ **67.** $h'(x) = 5t^4\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-5\left(1-2\sqrt{x}\right)^4}{\sqrt{x}}$

68. $h'(x) = \frac{-2bc}{(b+cx)^2}$ **69.** $h'(x) = \left(-\frac{1}{v^2}\right)\left(\frac{-ax}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{x}{a(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

70. $\frac{dy}{dx} = \left(9u^2 - 16u^3\right)(2x) = 18x\left(x^2-1\right)^2 - 32x\left(x^2-1\right)^3$

71. $\frac{dy}{dx} = 5v^4(2b) = 10b(3a+2bx)^4$ **72.** $\frac{dy}{dx} = 4t^3\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{4a(ax+b)^3}{c^4}$

73. $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2v^{\frac{3}{2}}}(6x) = \frac{-3x}{(3x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ **74.** $12x+y+11=0,\ x-12y+13=0$

75. $y = \frac{3}{4},\ x = 0$ **76.** $7x - 18y - 13 = 0,\ 54x + 21y - 47 = 0$

77. $x-12y-17=0,\ 12x+y+86=0$ **78.** $8x-y-3=0,\ 2x+16y-17=0$

79. $y + 4x - 1 - \pi = 0,\ 16y - 4x + \pi - 16 = 0$

80. $y - 12x + 17 = 0,\ 12y + x - 86 = 0$

81. $6y + 15x - 5\pi + 3\sqrt{3} = 0,\ 30y - 12x + 4\pi + 15\sqrt{3} = 0$

82. En $(1,\ 0):\ y - 2x + 2 = 0.$ En $(2,\ 0):\ y + x - 2 = 0.$
En $(3,\ 0):\ y - 2x + 6 = 0$ **83.** $(0,\ 0),\ (4,\ 0),\ (2,\ 16).$

84. $2y - x - 4 = 0,\ 2y - x + 4 = 0.$ Son paralelas

85. $y+x=0,\ 9y+x=0$ **86.** $y - 5x + 2 = 0$ **87.** $2y - x - 2\ln 2 = 0$

CAPITULO 3

SECCION 3.1

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{2}$ **2.** $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x}$ **3.** $\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2xy^2-3y^2}{6xy-2x^2y}$ **5.** $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2x^2}{2x^2y}$ **6.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(3x^2-y\right)y^2}{1+xy^2}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3-2xy^2}{y^3-3xy^2+2x^2y-1}$ **8.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}+3x(x-y)^2$ **9.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

10. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$ **11.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ **12.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x-ay}{ax-y}$

13. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ **14.** $\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt{y}\sqrt[3]{y^2}}{2\sqrt{y}+3\sqrt[3]{y^2}}$ **15.** $\frac{dy}{dx} = -1$

16. $y' = \frac{y}{\sec^2 y - x} = \frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$ **17.** $y' = -\frac{y}{x}$ **18.** $y' = \frac{\operatorname{sen}(x-y)+y\cos x}{\operatorname{sen}(x-y)-\operatorname{sen} x}$

19. $y' = \frac{e^y}{1-xe^y} = \frac{e^y}{2-y}$ **20.** $y' = \frac{e^{x+1}}{e^y+ye^y} = \frac{1}{1+y}e^{x-y+1}$

21. $y' = 2^{x-y}\frac{2^y-1}{1-2^x}$ **22.** $y' = \frac{1}{2(1+\ln y)}$ **23.** $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

24. b. $\left(f^{-1}\right)'(3) = -\frac{1}{4}$ **c.** $y + 4x = 7$ **d.** $4y + x = 7$

25. b. $\left(g^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{10}$ **c.** $y - 10x = -8$ **d.** $10y - x = 8$

26. b. $\left(h^{-1}\right)'(0) = 1$ **c.** $y = x$ **d.** $y = x$

27. $x-y+5=0$ **28.** $5x-6y+9=0$ **29.** $y-x=0$ **30.** $14x+13y-12=0$

31. $9x + 20\sqrt{3}y - 75 = 0.$ $\quad -9x + 20\sqrt{3}y + 75 = 0$

32. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ en $(a,\, b)$ y $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2$ en $(a,\, -b)$ **33.** $9x + 13y - 40 = 0$

37. $45°$ en $(1,\, 2)$ y en $(3,\, -2)$ **38.** $0°$ en $(0,\, 0)$ y $9°2'$ en $(1,\, 1)$

SECCION 3.2

1. $y' = x^{x^3+2}(1 + 3\ln x)$ **2.** $y' = \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2 + \ln x)$

3. $y' = 2\ln x \cdot x^{\ln x - 1}$ **4.** $y' = \frac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}(1 + \ln(\ln x))$

5. $y' = (\ln 2)(\ln 3)3^x 2^{3^x}$ **6.** $y' = a^x x^a\left(\frac{a}{x} + \ln a\right)$

7. $y' = \sqrt[x]{x}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$ **8.** $y' = \left(x^2+1\right)^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{2x \operatorname{sen} x}{x^2+1} + \cos x \ln\left(x^2+1\right)\right)$

9. $y' = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)\right)$

10. $y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$ **11.** $y' = \frac{x\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}\right)$

12. $y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2-1)}{(x+1)^2}}\left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2}{x+1}\right)$

SECCION 3.3

1. $y' = \frac{1}{\sqrt{81-x^2}}$ **2.** $y' = \frac{3}{x\sqrt{x^2-9}}$ **3.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

4. $y' = \frac{2x}{x^4+2x^2+2}$ **5.** $y' = -\frac{1}{1+x^2}$ **6.** $y' = 2\sqrt{4-x^2}$

7. $y' = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$ **8.** $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}}$ **9.** $y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

10. $y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ **11.** $y' = 0$ **12.** $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sec^2\left(\cos^{-1} x\right)$

13. $y' = \frac{4-x}{\sqrt{4x-x^2}}$ **14.** $y' = (x+y)^2$ **15.** $y' = \frac{y}{x}\left(\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)$

16. $12y + 2x - 6 - 3\pi = 0$ **17.** $4y + 8x - 3\pi = 0$

SECCION 3.4

1. $y'' = \frac{-b^2}{(b^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ **2.** $y'' = \frac{2\left(1-x^2\right)}{3(1+x^2)^2}$ **3.** $y'' = 2\tan^{-1} x + \frac{2x}{1+x^2}$

4. $y'' = -\frac{x}{1-x^2} - \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ **5.** $y'' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)e^{\sqrt{x}}$

6. $y'' = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x \operatorname{sen}^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ **7.** $y'' = 20x^3 - 24x,\ y''' = 60x^2 - 24$

8. $z'' = 14x^6 - 10x^4 - 1, \quad z''' = 84x^5 - 40x^3$

9. $f''(x) = 12(x-1)^2, \quad f'''(x) = 24(x-1)$

10. $g''(x) = 6\left(x^2+1\right)^2 + 24x^2\left(x^2+1\right), \quad g'''(x) = 120x^3 + 72x$

11. $y'' = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}},\ y''' = \frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}$ **12.** $h''(x) = \frac{-4}{(2+x)^3},\ h'''(x) = \frac{12}{(2+x)^4}$

13. $y'' = -x\operatorname{sen} x + 2\cos x, \quad y''' = -x\cos x - 3\operatorname{sen} x$

14. $y'' = \left(4x^3 + 12x^2 + 6x\right)\mathrm{e}^{2x}, \quad y''' = \left(8x^3 + 36x^2 + 36x + 6\right)\mathrm{e}^{2x}$

15. $y'' = \frac{2}{x^3}$ **16.** $y'' = \frac{-4a^2}{y^3} = \frac{-a}{xy}$ **17.** $y'' = -\frac{2x^4+2xy^3}{y^5} = -\frac{2x}{y^5}$

18. $y'' = \frac{-2x^2}{9y^5} = \frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}}$ **19.** $y'' = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$ **20.** $y'' = \frac{-b^4}{a^2y^3}$

24. $y^{(n)} = n!$ **25.** $y^{(n)} = 0$ **26.** $y^{(n)} = (n+1)!x$ **27.** $y^{(n)} = n!a$

28. $y^{(n)} = n!a_n$ **29.** $y^{(n)} = n!a^n$ **30.** $y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$

31. $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ **32.** $y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$ **33.** $y^{(n)} = a^n\cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$

34. $y^{(n)} = 2^{n-1}\operatorname{sen}\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$ **35.** $y^{(n)} = a^n\mathrm{e}^{ax}$ **36.** $y^{(n)} = (x+n)\mathrm{e}^x$

37. $y^{(n)} = (-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$, $n \geq 2$ **38.** $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ **39.** $y''(1) = 40$

40. $y''(-1) = -\frac{11}{8}$ **41.** $y''(1) = \frac{1}{2}$ **42.** $y''(2) = -\frac{3}{2}$

43. a. en $t = -2$ y $t = 4$ **b.** en $t = 1$ **c.** $(-\infty, -2)\cup(4, +\infty)$ **d.** $(-2, 4)$

44. a. en $t = 3$ **b.** en $t = -3\sqrt[3]{2}$ **c.** $(3, +\infty)$ **d.** $(-\infty, 0)\cup(0, 3)$

45. $a(-5) = -\frac{2}{3}\ m/seg^2, \quad a(1) = \frac{2}{3}\ m/seg^2$ **46.** $a\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ m/seg^2$

47. $v(1) = -27\ m/seg$ **48. a.** 160 pies **b.** 48 $pies/seg$ **c.** $t = 1.5\ seg$ **d.** $t = 5\ seg$ **e.** $v(5) = -112\ pies/seg$

50. $v_0 = 117.6\ m/seg.$ **51.** $156.8\ m$

SECCION 3.5

1. $y' = -\operatorname{cosech} x$ **2.** $y' = 2\cosh 2x\,\mathrm{e}^{\operatorname{senh} 2x}$

3. $y' = x^{\tanh c}\left(\frac{\tanh x}{x} + \operatorname{sech}^2 x\ln x\right)$ **4.** $y' = \frac{1}{4}\operatorname{sech}^4\frac{x}{2}$

5. $y' = \mathrm{e}^{ax}\left[a\cosh bx + b\operatorname{senh} bx\right]$

6. $y' = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} = \frac{1}{2\sqrt{\cosh x - \operatorname{senh} x}}$ **7.** $y' = \frac{-2\ \operatorname{cosech}^{-1}x}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

8. $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4+a^4}}$ **9.** $y' = -\operatorname{cosec} x$ **10.** $y' = \frac{2}{1-x^4}$

SECCION 3.6

1. 2,100,000 litros/año **2. a.** 200 habitantes por año **b.** 2 %

3. $3\pi\ m^2/seg$ **4.** $1.5\ m/min$ **5.** $-4.5\ m/min$ **6.** $-2.8\ km/h$

7. $16\,m/min$ **8.** $80\,pies/min$ **9.** $(-1, -5)$ **10.** $100\sqrt{3}\,cm^2/min$

11. $-15\ cm/seg$ **12.** $-\frac{10}{\pi}\ pies/min,\ -240\,pies^2/min$ **14.** $-\frac{7}{2}\ m/min$

15. $-\frac{80}{3}\ m/seg$ **16.** $\frac{1}{3\pi}\ m/min$ **17.** $3\,m/hora$ **18.** $\frac{8}{75}\ m/hora$

19. $-0.9\,m/hora$ **20.** $-\frac{17}{\sqrt{10}} \approx -5.38\,pies/seg$ **21.** $\frac{125\pi}{9} \approx 43.63\,m/hora$

22. $\frac{6{,}600}{\sqrt{124}} \approx 592.7\,km/h$ **23.** $2.33\ m/seg$ **24.** $10\pi\ km/min$

25. $-1{,}200\,pies/seg$ **26.** $64\,pies/seg$ **27.** $\frac{10.7}{49} \approx 0.218\,ohms/seg$

28. b. 2 horas

SECCION 3.7

1. a. $\Delta y = 2xdx + (dx)^2$ **b.** $dy = 2xdx$ **c.** $(dx)^2$

2. a. $\Delta y = e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)$ **b.** $dy = e^x dx$ **c.** $e^x\left(e^{\Delta x}-1-dx\right)$

3. a. $\Delta y = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ **b.** $dy = \frac{dx}{x}$ **c.** $\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-\frac{dx}{x}$

4. a. -0.1791 **b.** -0.18 **c.** 0.0009

5. a. -0.2276278 **b.** -0.2302585 **c.** 0.0026307

10. $dy = -6xe^{-3x^2}$ **11.** $dy = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $dy = \frac{2dx}{3(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

13. $dy = -\frac{x}{y}dx$ **14.** $dy = \frac{2x+\sqrt{\frac{y}{x}}}{2y-\sqrt{\frac{x}{y}}}dx$ **15.** $dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)dx$

17. 8.9444 **18.** 3.0092592 **19.** 6.0185 **20.** 2.004

21. $\frac{\pi}{4}+0.04 \approx 0.8254$ **22.** 0.07 **23.** 0.24 **24.** 0.86618

25. a. $86.4\,cm$ **b.** $87.848\,cm^3$ **c.** $28.8\,cm^2$ **d.** $29.04\,cm^2$

26. $3,840\pi \approx 12063.71cm^3$ **27.** $2.5\,\%$ **28. a.** $0.64\pi\,m^3$ **b.** $0.75\,\%$

29. a. $\frac{72}{\pi} \approx 22.92cm^2$ **b.** $\frac{1}{72} \approx 0.01389$ **c.** $\frac{1,296}{\pi^2} \approx 131.312$ **d.** $\frac{1}{48} \approx 0.0208$

30. a. $\frac{\pi}{18} \approx 0.174533$ **b.** $0.504\,\%$

31. a. $\$27,200$ **b.** $\$432$ **c.** 0.0159 **d.** $1.59\,\%$

CAPITULO 4

SECCION 4.1

1. máx. $= f(0) = 4$, mín. no tiene **2.** máx. no tiene, mín. $= g(2) = -1$ **3.** máx. no tiene, mín. $= h(2) = h(-2) = 0$

4. máx. no tiene, mín. no tiene **5.** máx. no tiene, mín. no tiene **6.** máx. $= g\left(\frac{4}{3}\right) = 3$, mín. $= g(3) = \frac{1}{2}$

7. máx.$= h(-4) = 6$, mín.$= \ln 1 = 0$ **8.** máx.$= f(1) = 3$, mín.$= f(2) = 0$

9. 0, 2, $\frac{8}{3}$ **10.** $\pi+2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ **11.** 0, 2 **12.** todo $\mathbb{R}$

13. 1 **14.** 0, $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$ **15.** máx. $= f(3) = \frac{3}{4}$, mín. $= f(1) = \frac{1}{2}$

16. máx. $= f(1) = \frac{1}{2}$, mín. $= f(-1) = -\frac{1}{2}$ **17.** máx. $= f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1-\frac{\pi}{4}$, mín. $= f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}-1$

18. máx. $= f(3) = 1$ mín. $= f(-5) = -3$ **19.** máx. $= f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, mín. $= f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

20. máx. $= f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$, mín. $f(0) = f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

21. máx. $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}} \approx 0.322397$, mín. $g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{5\pi}{4}}} \approx -0.013932$

22. máx. $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2e} \approx 0.184$, mín. $= f(1) = 0$

SECCION 4.2

1. $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ **2.** $c_1 = \frac{\pi}{4}$, $c_2 = \frac{5\pi}{4}$ **3.** $c = 3.2$ **4.** $c = 1$

5. $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **6.** $c = \sqrt{2}$ **7.** $c = 1 + \frac{8}{9}\sqrt{3}$

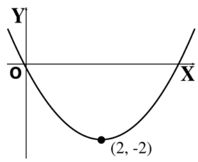
8. $c = \frac{1-\sqrt{1-\ln^2 2}}{\ln 2} \approx 0.4028$ **9.** $c = \tan^{-1}\left(\frac{3\ln 2}{\pi}\right) \approx 0.6619$

10. $c_1 = -\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \approx -0.5227,\ c_2 = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \approx 0.5227$

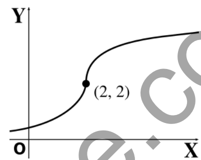
20. $g(5) = 20$ **30.** $c = \frac{\pi}{4}$ **31.** $c = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \approx 1.58198$ **32.** $c = \frac{1}{2}$

SECCION 4.3

1.



2.



3. **a.** -1, 0, 2, 4 **b.** Decreciente $(-\infty, -1]$, $[0, 2]$ y $[2, 4]$. Creciente $[-1, 0]$ y $(4, +\infty)$
c. Mín. local en -1 y 4. Máximo local en 0

4. **a.** 1, 2, 3 **b.** Cóncava hacia ariba en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$. Cóncava hacia abajo en $(1, 2)$ y $(2, 3)$
c. 1 y 3

5. **a.** -2 **b.** Creciente en $(-\infty, -2]$, decreciente en $[-2, +\infty)$
c. $f(-2) = 11$ es máx. local
d. No tiene **e.** Cóncava hacia abajo en $(-\infty, +\infty)$
f. No tiene

6. **a.** -1, 1 **b.** Creciente en $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$, decreciente en $[-1, 1]$
c. $f(-1) = 3$ es máx. local, $f(1) = -1$ es mín. local **d.** 0
e. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$, cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$ **f.** $(0, f(0)) = (0, 1)$

7. **a.** -3, 1 **b.** Creciente en $(-\infty, -3]$ y $[1, +\infty)$, decreciente en $(-3, 1]$
c. máx. local: $f(-3) = 39$, mín. local: $f(1) = 7$ **d.** -1
e. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$, cóncava hacia abajo en $(-1, +\infty)$ **f.** $(-1, f(-1)) = (-1, 23)$

8. **a.** -1, 0, 1 **b.** Creciente: $[-1, 0]$ y $[1, +\infty)$, decreciente: $(-\infty, -1]$ y $[0, 1]$
c. Mín local: $f(-1) = 3$ y $f(1) = 3$, máx. local: $f(0) = 4$ **d.** $-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}$
e. Cóncava hacia arriba:

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right),$$

cóncava hacia abajo: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

f. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{31}{9}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{31}{9}\right)$

9. a. $-2,\ -\frac{1}{2},\ 1$

b. Creciente en: $\left[-2,\ -\frac{1}{2}\right]$ y $[1,\ +\infty)$, decreciente en: $(-\infty,\ -2)$ y $\left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$

c. Mín. local: $h(-2) = -3$ y $h(1) = -3$ máx. local: $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{33}{16}$

d. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

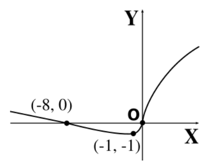
e. Cóncava hacia arriba en: $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ +\infty\right)$, cóncava hacia abajo en: $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

f. $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2},\ h\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \approx \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2},\ -0.73\right)$ y $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ h\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \approx \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ -0.73\right)$

10. a. No tiene **b.** Decreciente: $(-\infty,\ 2)$ y $(2,\ +\infty)$
c. No tiene **d.** No tiene
e. Cóncava h. abajo: $(-\infty,\ 2)$, cóncava h. arriba: $(2,\ +\infty)$ **f.** No tiene

11. a. 2 **b.** Creciente: $[2,\ +\infty)$, decreciente: $[0,\ 2]$
c. Mín. local: $f(2) = -4\sqrt{2}$ **d.** No tiene
e. Cóncava h. arriba: $(0,\ +\infty)$ **f.** No tiene

12. a. -1, 0 **b.** Creciente:$[-1, +\infty)$, decreciente:$(-\infty, -1]$
c. Mín. local: $f(-1) = -1$ **d.** 0, -8
e. Cóncava h. abajo: $(-\infty,\ -8)$ y $(0,\ +\infty)$, cóncava h. arriba: $(-8,\ 0)$
f. $(-8,\ f(-8)) = (-8,\ 0)$ y $(0,\ f(0)) = (0,\ 0)$

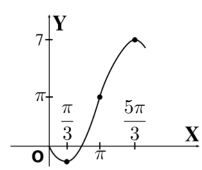


13. a. 0 **b.** Creciente: $(-\infty,\ +\infty)$ **c.** No tiene
d. 0 **e.** Cóncava h. abajo: $(-\infty,\ 0)$, cóncava h. arriba: $(0,\ +\infty)$ **f.** $(0,\ 0)$

14. a. 1 **b.** Decreciente: $(0,\ 1]$, creciente: $[1,\ +\infty)$ **c.** Mín. local: $h(1) = 1$
d. No tiene **e.** Cóncava h. arriba: $(0,\ +\infty)$
f. No tiene

15. a. No tiene **b.** Creciente: $(-\infty,\ +\infty)$ **c.** No tiene
d. 0 **e.** Cóncava h. abajo: $(-\infty,\ 0)$, cóncava h. arriba: $(0,\ +\infty)$ **f.** $(0,\ 0)$

16. a. $\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$ **b.** Decreciente: $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$ y $\left[\frac{5\pi}{3},\ 2\pi\right]$ Creciente: $\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}\right]$
c. Mín. local: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.7$, máx. local: $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 7$ **d.** π
e. Cóncava h. arriba: $(0,\ \pi)$, cóncava h. abajo: $(\pi,\ 2\pi)$ **f.** $(\pi,\ f(\pi)) = (\pi,\ \pi)$



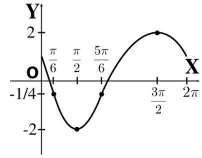
17. a. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$

b. Decreciente: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, creciente: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

c. Mín. local: $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, máx. local: $g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$

d. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$

e. Cóncava hacia abajo: $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, cóncava h. arriba: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$



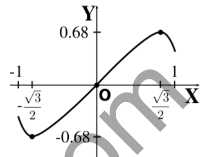
f. $\left(\frac{\pi}{6}, g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{6}, g\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{4}$

18. a. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Decreciente: $\left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ y $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, creciente: $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

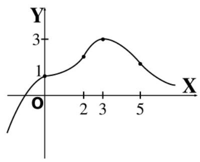
c. Mín. local: $h\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -0.68$, máx. local: $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.68$

d. 0

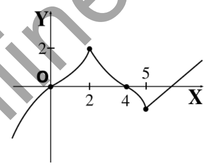


e. Cóncava h. arriba: $(-1, 0)$, cóncava h. abajo: $(0, 1)$ **f.** $(0, 0)$

19.



20.



21. a. 0 y 4

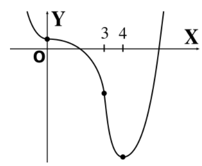
b. Decreciente: $(-\infty, 0]$ y $[0, 4]$, creciente: $[4, +\infty)$

c. Mín. local en 4

d. 0 y 3

e. Cóncava h. arriba: $(-\infty, 0)$ y $(3, +\infty)$, cóncava h. abajo: $(0, 3)$

f. 0 y 3

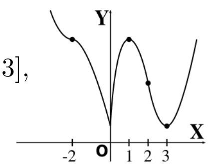


22. a. -2, 0, 1 y 3

b. Decreciente: $(-\infty, -2]$, $[-2, 0]$, $[1, 3]$, creciente: $[0, 1]$, $[3, +\infty)$

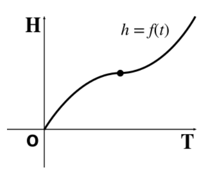
c. Min. local en 0 y 3, máx. local en 1

d. -2 y 2

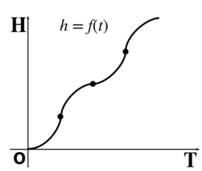


e. Cóncava h. arriba: $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$, cóncava h. abajo: $(-2, 0)$, $(0, 2)$ **f.** -2 y 2

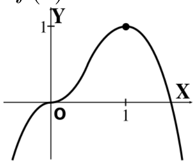
23.



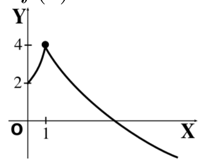
24.



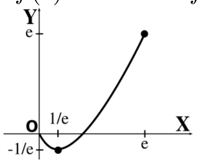
25. Máx. $f(1) = 1$. Mín. no tiene



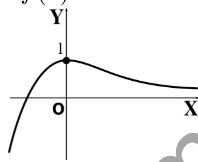
26. Máx. $f(1) = 4$. Mín. no tiene



27. Máx. $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$. Mín. $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$



28. Máx. $f(0) = 1$. Min. no tiene



SECCION 4.4

1. 0	**2.** $-\frac{1}{2}$	**3.** -1	**4.** $\frac{1}{2}$	**5.** $\frac{1}{2}$	**6.** 2
7. $\frac{\pi^2}{2}$	**8.** 2	**9.** 0	**10.** 1	**11.** $\frac{\ln^2 10 - \ln^2 5}{2}$	
12. 0	**13.** 1	**14.** $\frac{1}{2}$	**15.** $-\frac{1}{4}$	**16.** $\frac{1}{12}$	**17.** $\frac{1}{2}$
18. -1	**19.** $\frac{1}{2}$	**20.** $\frac{1}{3}$	**21.** $\frac{1}{6}$	**22.** 0	**23.** 1
24. $\frac{2}{\pi}$	**25.** $-\frac{4a^2}{\pi}$	**26.** 1	**27.** 1	**28.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$	**29.** e^{-2}
30. 1	**31.** 1	**32.** 1	**33.** 1	**34.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$	**35.** 1
36. $\frac{2}{3}$	**37.** $+\infty$	**38.** e^2	**39.** $\frac{1}{2}$	**40.** e	**41.** 0
42. -8	**43.** 0				

SECCION 4.5

1. a. $\mathbb{R}$ **b.** Ninguna

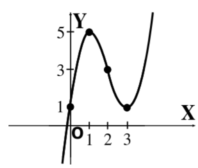
c. Eje Y: (0,1). Eje X: aproximadamente $(-0.104,\ 0)$

d. Sin asíntotas

e. Máx. local: $f(1) = 5$, mín. local: $f(3) = 1$

f. Cóncava h. abajo: $(-\infty, 2]$.

Cóncava h. arriba: $[2, +\infty)$. Pto. inflexion: (2, 3)



2. a. $\mathbb{R}$ **b.** Ninguna **c.** $(0,\ 1), (-1,\ 0), (1,\ 0)$

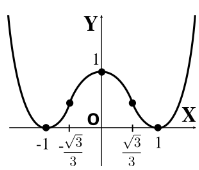
d. Sin asíntotas

e. Máx. local: $f(0) = 1$, mín. local: $f(-1) = 0$

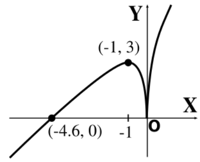
f. Cóncava h. arriba: $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ y $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$,

cóncava h. abajo: $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

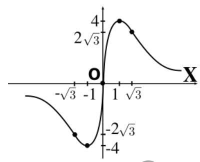
Ptos. inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{4}{9}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{4}{9}\right)$



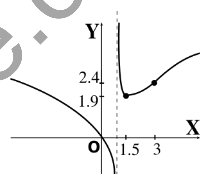
3. **a.** $\mathbb{R}$ **b.** Ninguna **c.** $(0,\,0)$, $(-4.6,\,0)$, $(0,\,0)$
d. Sin asíntotas
e. Máx. local: $f(-1)=3$, mín. local: $f(0)=0$
f. Cóncava h. abajo: $(-\infty,\,0]$ y $[0,\,+\infty)$
Punto de inflexión: no tiene



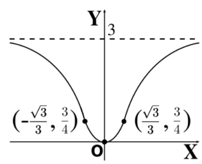
4. **a.** $\mathbb{R}$ **b.** Simetría respecto al origen
c. $(0,\,0)$ **d.** Asíntotas: $y=0$
e. $f'(x)=-\frac{8(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$,
Mín. local: $f(-1)=-4$, máx. local: $f(1)=4$
f. $f''(x)=\frac{16x\left(x^2-3\right)}{(x^2+1)^3}$,
cóncava h. abajo: $(-\infty,\,-\sqrt{3}]$ y $[0,\,\sqrt{3})$
cóncava h. arriba: $\left[-\sqrt{3},\,0\right]$ y $\left[\sqrt{3},\,+\infty\right)$
Pto. de inflexión: $\left(-\sqrt{3},\,-2\sqrt{3}\right)$, $(0,\,0)$, $\left(\sqrt{3},\,2\sqrt{3}\right)$



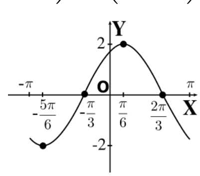
5. **a.** $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,\,1)\cup(1,\,+\infty)$
b. Ninguna simetría **c.** Solo en $(0,\,0)$
d. Asíntota vertical: $x=1$
e. $f'(x)=\frac{2x-3}{3(x-1)^{\frac{4}{3}}}$, mín local: $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\approx 1.9$
f. $f''(x)=\frac{2(3-x)}{9(x-1)^{\frac{7}{3}}}$,
Cóncava h. abajo: $(-\infty,\,1)$ y $[3,\,+\infty)$,
cóncava h. arriba: $(1,\,3]$. Pto. inflexión: $\left(3,\,3\sqrt[3]{2}\right)\approx(3,\,2.4)$



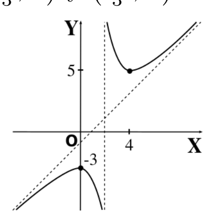
6. **a.** $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$ **b.** Simetría respecto al eje Y
c. Solo en $(0,\,0)$ **d.** Asíntota horizontal: $y=3$
e. $f'(x)=\frac{6x}{(x^2+1)^2}$. Mín. local: $f(0)=0$
f. $f''(x)=\frac{6\left(1-3x^2\right)}{(x^2+1)^3}$,
cóncava h. abajo: $\left(-\infty,\,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\,+\infty\right)$,
cóncava h. arriba: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Pto. inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\,\frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\,\frac{3}{4}\right)$



7. **a.** $\mathrm{Dom}(f)=[-\pi,\,\pi]$ **b.** Ninguna simetría
c. Eje Y: $(0,\,\sqrt{3})$, eje X: $\left(-\frac{\pi}{3},\,0\right)$ y $\left(\frac{2\pi}{3},\,0\right)$
d. Sín asíntotas
e. Mín. local: $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-2$, máx. local: $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$
f. Cóncava h. arriba: $\left[-\pi,\,-\frac{\pi}{3}\right]$ y $\left[\frac{2\pi}{3},\,\pi\right]$,
cóncava h. abajo: $\left[-\frac{\pi}{3},\,\frac{2\pi}{3}\right]$. Pto. de inflexión: $\left(-\frac{\pi}{3},\,0\right)$ y $\left(\frac{2\pi}{3},\,0\right)$



8. **a.** $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$ **b.** Ninguna simetría
c. Eje Y: $(0,\,-3)$
d. Asíntota vertical: $x=2$,
Asíntota oblicua: $y=x-1$
e. Máx. local: $f(0)=-3$, mín. local: $f(4)=5$
f. Cóncava h. abajo: $(-\infty,\,2)$,
cóncava h. arriba: $(2,\,+\infty)$. Sin pto. de inflexión



9. **a.** $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ **b.** Ninguna simetría

c. Eje X: $(1,\ 0)$

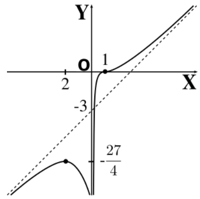
d. Asín. vertical: $x = 0$, Asín. oblicua: $y = x - 3$

e. $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$

Máx. local: $f(-2) = -\frac{27}{4}$, mín. local: no tiene

f. Cóncava hacia abajo: $(-\infty,\ 0)$ y $(0,\ 1]$

Cóncava h. arriba: $[1, +\infty)$. Pto. inflexión: $(1, 0)$



10. **a.** $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ **b.** Nínguna simetría

c. Eje Y: $(0, 0)$. Eje X: $(0, 0)$ y $(6, 0)$

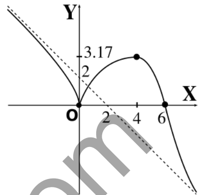
d. Asíntota oblicua: $y = -x + 2$

e. $f'(x) = \frac{4-x}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}$

Mín. $f(0) = 0$, máx. local: $f(4) = 2\sqrt[3]{4} \approx 3.17$

f. Cóncava h. abajo: $(-\infty,\ 0]$ y $[0,\ 6]$

Cóncava h. arriba: $[6,\ +\infty)$. Pto. inflexión: $(6,\ 0)$



11. **a.** $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ **b.** Simetría respecto al origen

c. No hay intersección

d. Asín. vertical: $x = 0$, asín. oblicua: $y = x$

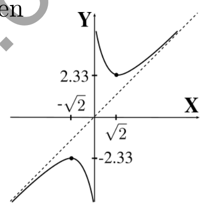
e. $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x^2}}\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)$

Máx. local: $f\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} \approx -2.33$

mín. local: $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} \approx 2.33$

f. Cóncava hacia abajo: $(-\infty,\ 0)$

Cóncava h. arriba: $(0,\ +\infty)$. No hay pto. inflexión



SECCION 4.6

1. largo = ancho = 18 cm **3.** 100 $m.$, 200 $m.$ **4.** 16 cm

5. 3 $cm.$ **6.** 1 $dm.$ **7.** 1 $dm.$ **8.** largo = ancho = altura = 40 $cm.$

9. 140 $m.$, $\frac{280}{\pi}$ $m.$ **10.** $\frac{40{,}000}{\pi}$ m^2. **11.** base = $\frac{14}{4+\pi}$, altura rectán. = $\frac{7}{4+\pi}$

12. base = $\frac{36}{12-\sqrt{3}} \approx 3.51$, altura rectángulo = $\frac{54-9\sqrt{3}}{12-\sqrt{3}} \approx 3.74$

13. Entre B y C a 1.6 km de B **14.** P coincide con C

15. Remar hasta P entre F y B a 3.6 km de F

16. Remar hasta la bodega **17.** 70 habitaciones, \$75

18. 88 plantas **19.** base = $\sqrt{2}r$, altura = $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ **20.** $\frac{\pi}{3}$ **21.** 4, 4

22. $a = 2\sqrt{3}$, $h = 2\sqrt{6}$ **23.** **a.** $\frac{12\pi}{4+\pi} \approx 5.28$ para la circunferencia
b. 12 para la circunferencia(no hay cuadrado)

24. base = 60 cm, altura = $3\sqrt{3}$ $cm.$ **27.** $3\sqrt{3}$

28. radio cilin. = $\frac{\sqrt{2}}{2}r$, alt. = $\sqrt{2}r$ **29.** radio cono = $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$, altura = $\frac{4}{3}r$

30. radio cono = $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$, altura = $\frac{4}{3}r$ **32.** **a.** $\theta \approx 2.5$ **b.** $A \approx 171.4\, m^2$.

33. 60 $m.$, 120 $m.$ **34.** 24 $m.$, 36 $m.$ **35.** **a.** 3 $dm.$, 6 $dm.$, 4 $dm.$
b. $3\sqrt[3]{2}$, $6\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{2}$

36. 18 cm , 27 cm. **37.** $8\sqrt{6}\,m.$, $10\sqrt{6}\,m$. **38.** radio $= 1\,dm.$, altura $= 2\,dm.$

39. radio $=$ altura $= \sqrt[3]{2}\,dm.$ **40.** radio $=$ altura $= 6\,cm.$

41. 80 $km/h.$ **43.** **a.** $x = 16\,cm$ **b.** $x = 16\,cm.$

44. radio $= 4\sqrt{6}\,cm$, altura $= 8\sqrt{3}\,cm.$ **45.** $13\sqrt{13} \approx 46.87$ **46.** 8 $m.$

SECCION 4.7

1. $r_1 \approx -0.655442$, $r_2 \approx 0.789244$, $r_3 \approx 3.866198$ **2.** 0.103803

3. 0.739085 **4.** 0.835123 **5.** 0.567143 **6.** 1.763223

7. 1.377337 **8.** 3.096639 **9.** 2.028758 **10.** -2.331122

11. 0.377677 **12.** 2.668402 **13.** 1.1224620 **14.** 3.645174

15. 1.146470 **16.** **a.** $P_0 = (0.835,\, 0.697)$ **b.** 1.358 **17.** $g(2.058) = 5.586$